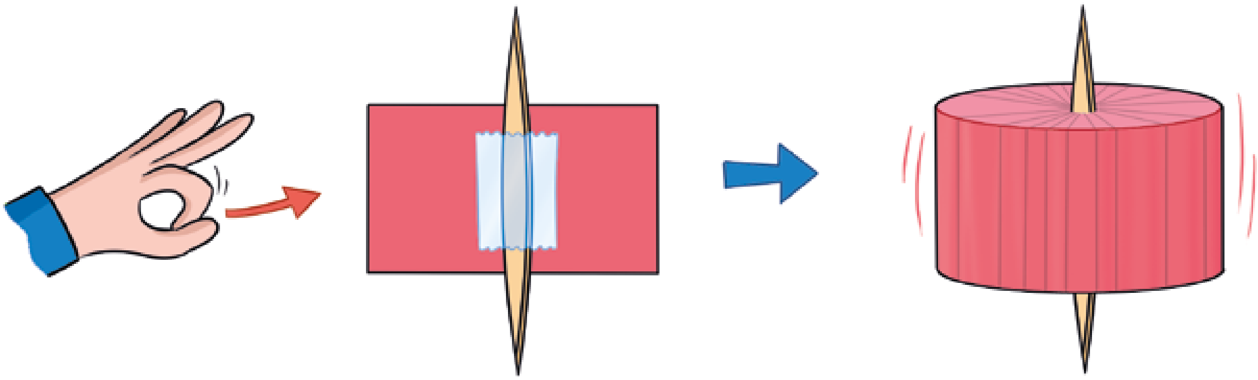
11 CUERPOS GEOMÉTRICOS

Página 243

Con lo que ya sabes, resuelve

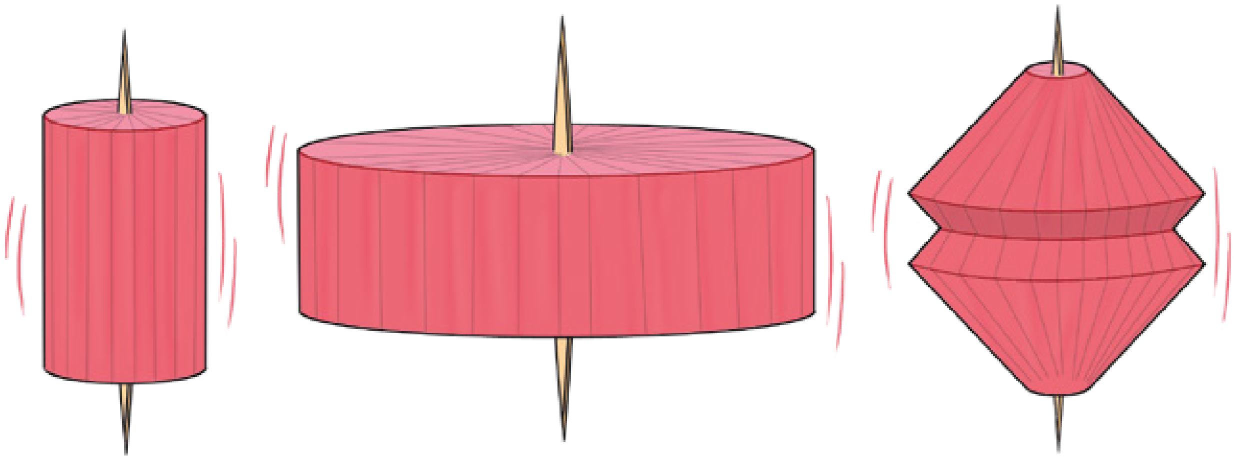
Construye, manipula y observa.



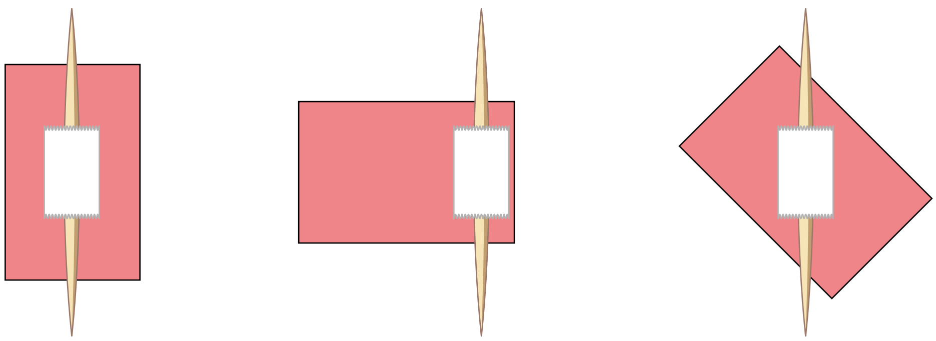
1 **¿Qué nombre recibe el cuerpo que se ve al hacer girar el rectángulo rojo?**

Al hacer girar el rectángulo se ve un cilindro.

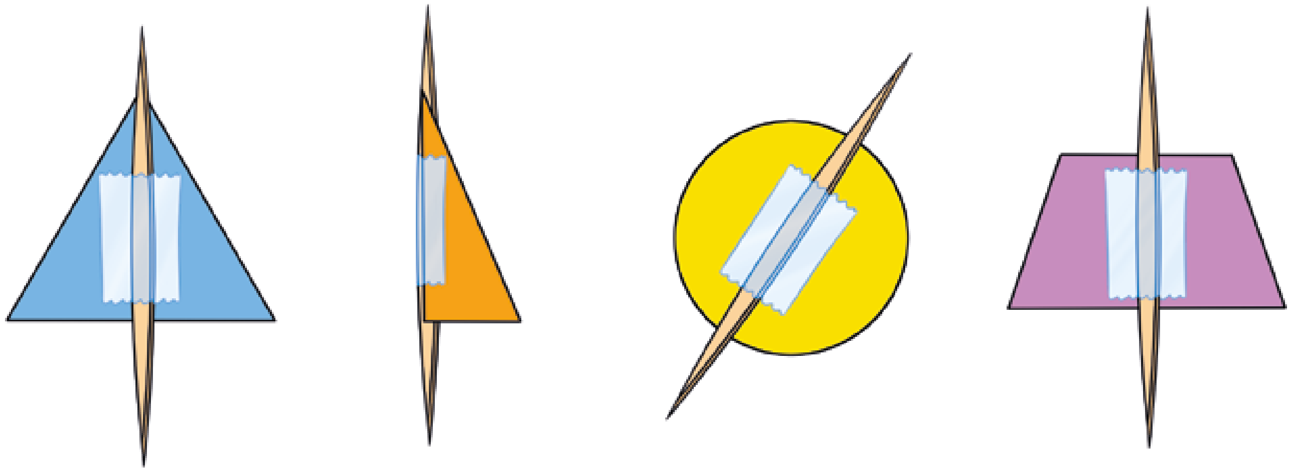
2 **¿Cómo habría que colocar el palillo, sobre el mismo rectángulo rojo, para que al girar aparezca cada uno de estos cuerpos? Dibújalo.**



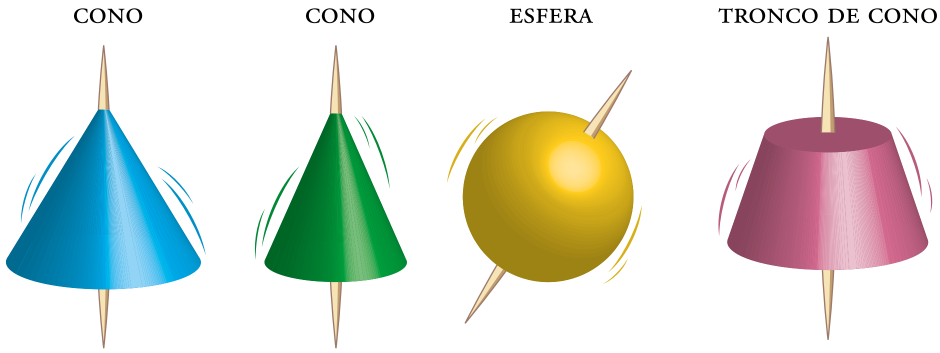
Las posiciones en las que habría que colocar el palillo son las siguientes:



3 **Dibuja y nombra los cuerpos que se verán al hacer girar estas cartulinas, cada uno alrededor de su palillo.**



Se verán los siguientes cuerpos geométricos:



4 **¿Qué tienen en común todos los cuerpos que se tratan en esta página? ¿Sabes cómo se llama el conjunto que forman?**

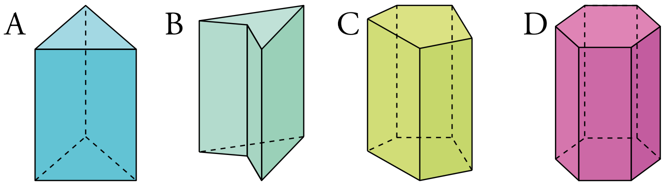
Tienen en común un eje de giro. Forman el conjunto de los «cuerpos de revolución».

1 ▶ PRISMAS

Página 244

Para practicar

1 **Observa los siguientes prismas:**



a) Clasifícalos según sea su base.

b) Indica cuáles son regulares.

c) Dibuja el desarrollo plano del prisma A.

a) A: Triangular

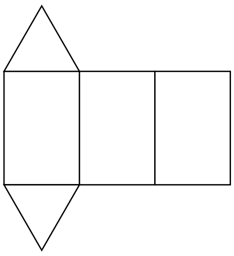
B: Cuadrangular

C: Pentagonal

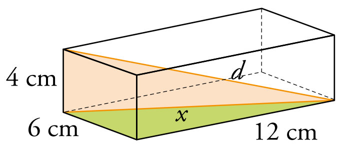
D: Hexagonal

b) Son regulares el A y el D.

c)



2 **Copia y completa para calcular la diagonal de un ortoedro de dimensiones 4 cm, 6 cm y 12 cm.**



Los triángulos coloreados son rectángulos. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$\boldsymbol{x^2 = 12^2 + 6^2}$

$\boldsymbol{d^2 = x^2 + 4^2 = \ldots^2 + \ldots^2 + \ldots^2 = \ldots \rightarrow d = \sqrt{\ldots} = 14 \text{ cm}}$

Solución: **La diagonal del ortoedro mide 14 cm.**

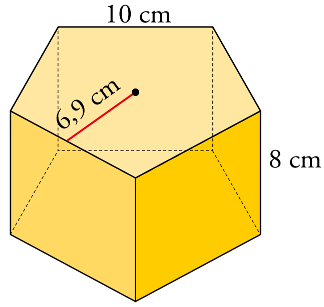
$d^2 = x^2 + 4^2 = 12^2 + 6^2 + 4^2 = 196 \rightarrow d = \sqrt{196} = 14 \text{ cm}$

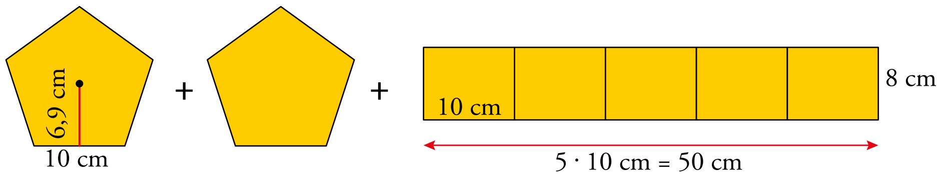
Página 245

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

1 **Calcula el área de este prisma pentagonal regular.**





$$\mathbf{A_{BASE} = \frac{perímetro \cdot apotema}{2} = \frac{\dots \cdot \dots}{2} = \dots\ cm^2}$$

$$\mathbf{A_{LATERAL} = perímetro\ de\ la\ base \cdot altura = \dots \cdot \dots = \dots\ cm^2}$$

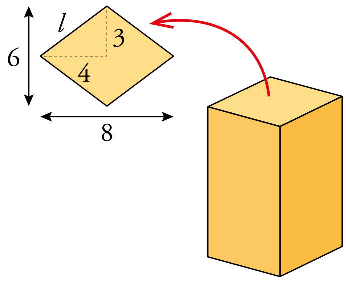
$$\mathbf{A_{TOTAL} = A_{LATERAL} + 2 \cdot A_{BASE} = \dots + 2 \cdot \dots = 745\ cm^2}$$

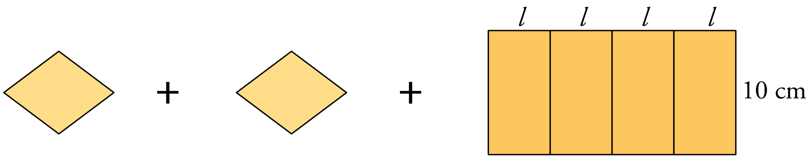
$$A_{BASE} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{50 \cdot 6{,}9}{2} = 172{,}5\ \text{cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = 50 \cdot 8 = 400\ \text{cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{LATERAL} + 2 \cdot A_{BASE} = 400 + 2 \cdot 172{,}5 = 745\ \text{cm}^2$$

2 **Las bases de un prisma recto son rombos cuyas diagonales miden 8 cm y 6 cm. La altura del prisma es 10 cm. Halla su área total.**





Utilizando el teorema de Pitágoras: $\mathbf{l = \sqrt{3^2 + \dots^2} = \dots\ cm}$

Perímetro de la base: $\mathbf{P = 4 \cdot l = \dots}$ **cm; Altura: h = … cm**

$$\mathbf{A_{BASE} = \frac{diagonal_1 \cdot diagonal_2}{2} = \frac{\dots \cdot \dots}{2} = \dots\ cm^2}$$

$$\mathbf{A_{LATERAL} = P \cdot h = \dots \cdot \dots = \dots\ cm^2}$$

$$\mathbf{A_{TOTAL} = \dots + 2 \cdot \dots = 248\ cm^2}$$

Utilizando el teorema de Pitágoras: $l = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm

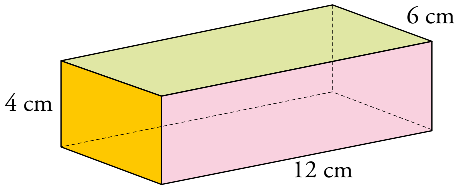
Perímetro de la base: $P = 4 \cdot l = 20$ cm; Altura: h = 10 cm

$$A_{BASE} = \frac{\text{diagonal}_1 \cdot \text{diagonal}_2}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24\ \text{cm}^2$$

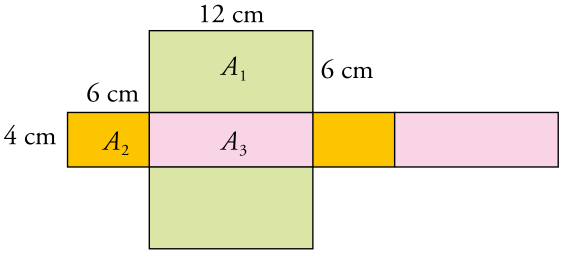
$$A_{LATERAL} = P \cdot h = 20 \cdot 10 = 200\ \text{cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = 200 + 2 \cdot 24 = 248\ \text{cm}^2$$

3 **Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 4 cm, 6 cm y 12 cm.**



Como las caras son iguales dos a dos, podemos actuar de una forma más directa:



$\boldsymbol{A_1 = 12 \cdot 6 = \ldots\ \mathrm{cm}^2}$

$\boldsymbol{A_2 = 4 \cdot \ldots = \ldots\ \mathrm{cm}^2}$

$\boldsymbol{A_3 = \ldots \cdot \ldots = \ldots\ \mathrm{cm}^2}$

$\boldsymbol{A_{\mathrm{TOTAL}} = 2 \cdot (A_1 + A_2 + A_3) = 2 \cdot (\ \ldots + \ldots + \ldots) = 288\ \mathrm{cm}^2}$

$A_1 = 12 \cdot 6 = 72\ \mathrm{cm}^2$

$A_2 = 4 \cdot 6 = 24\ \mathrm{cm}^2$

$A_3 = 4 \cdot 12 = 48\ \mathrm{cm}^2$

$A_{\mathrm{TOTAL}} = 2 \cdot (A_1 + A_2 + A_3) = 2 \cdot (72 + 24 + 48) = 288\ \mathrm{cm}^2$

2 PIRÁMIDES

Página 247

Para fijar ideas

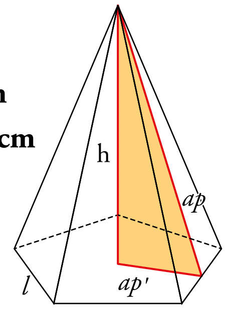
Copia y completa en tu cuaderno.

1 **Halla el área total de esta pirámide pentagonal regular.**

Empezamos calculando la apotema, *ap*, de la pirámide.

Ten en cuenta que el triángulo coloreado es rectángulo (la hipotenusa es *ap*, y los catetos *ap'* y h).

l = 8 cm
h = 18 cm
ap' = 5,5 cm



$$ap = \sqrt{h^2 + (ap')^2} = \sqrt{\ldots + \ldots} = \sqrt{\ldots} \approx \ldots \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap'}{2} = \frac{(5 \cdot \ldots) \cdot \ldots}{2} = \ldots \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \frac{(5 \cdot \ldots) \cdot \ldots}{2} = \ldots \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = \ldots + \ldots = 486 \text{ cm}^2$$

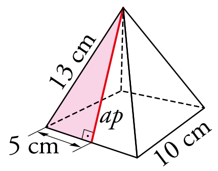
$$ap = \sqrt{h^2 + (ap')^2} = \sqrt{324 + 30{,}25} = \sqrt{354{,}25} \approx 18{,}8 \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap'}{2} = \frac{(5 \cdot 8) \cdot 5{,}5}{2} = 110 \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \frac{(5 \cdot 8) \cdot 18{,}8}{2} = 376 \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = 110 + 376 = 486 \text{ cm}^2$$

2 **Halla el área total de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 10 cm de lado y su arista lateral mide 13 cm.**



Empezamos calculando la apotema, *ap*, de la pirámide. Ten en cuenta que el triángulo coloreado es rectángulo (la hipotenusa es 13, y los catetos *ap* y 5).

$$ap = \sqrt{13^2 - \ldots^2} = \sqrt{\ldots - \ldots} = \sqrt{\ldots} = \ldots \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = \ldots^2 = \ldots \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \frac{4 \cdot \ldots \cdot \ldots}{2} = \ldots \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = \ldots + \ldots = 340 \text{ cm}^2$$

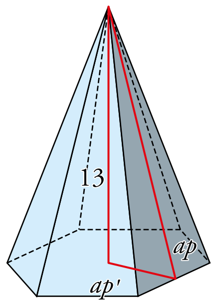
$$ap = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 12}{2} = 240 \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = 100 + 240 = 340 \text{ cm}^2$$

3 **Calcula las superficies lateral y total de una pirámide hexagonal regular de 13 cm de altura sabiendo que el radio de su base mide 6 cm.**



Calculamos la apotema de la pirámide, *ap*, y la apotema de la base, *ap'*. Recuerda que en un hexágono regular el radio es igual al lado. Por tanto:

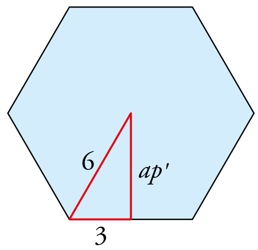
$(ap')^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \rightarrow ap' = \sqrt{27} \approx 5{,}2$ cm

$ap = \sqrt{\ldots^2 + (ap')^2} = \sqrt{\ldots + 27} = \sqrt{\ldots} = \ldots$ cm

$A_{BASE} = \dfrac{\text{perímetro de la base} \cdot ap'}{2} = \dfrac{6 \cdot \ldots \cdot \ldots}{2} \approx \ldots \text{ cm}^2$

$A_{LATERAL} = \dfrac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \dfrac{6 \cdot \ldots \cdot \ldots}{2} = \ldots \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = \ldots + \ldots = 345{,}6 \text{ cm}^2$



$ap = \sqrt{13^2 + (ap')^2} = \sqrt{169 + 27} = \sqrt{197} = 14$ cm

$A_{BASE} = \dfrac{\text{perímetro de la base} \cdot ap'}{2} = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 5{,}2}{2} \approx 93{,}6 \text{ cm}^2$

$A_{LATERAL} = \dfrac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 14}{2} = 252 \text{ cm}^2$

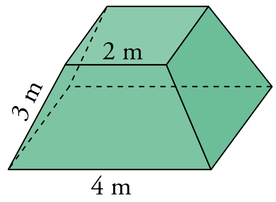
$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = 93{,}6 + 252 = 345{,}6 \text{ cm}^2$

3 ▶ TRONCOS DE PIRÁMIDE

Página 248

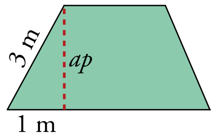
Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.



1 **Halla el área lateral y el área total del tronco de pirámide cuadrangular regular.**

Empezamos calculando la apotema (altura de la cara lateral):



$$\boldsymbol{ap = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2{,}83 \text{ m}}$$

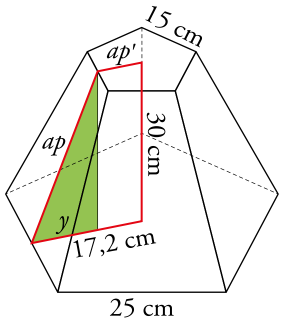
$$\boldsymbol{A_{\text{LATERAL}} = \frac{4 \cdot \ldots + 4 \cdot \ldots}{2} \cdot \ldots = 33{,}96 \text{ m}^2}$$

$$\boldsymbol{A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + A_{\text{BASE MAYOR}} + A_{\text{BASE MENOR}} = \ldots + 4^2 + \ldots^2 = 53{,}96 \text{ m}^2}$$

$$A_{\text{LATERAL}} = \frac{4 \cdot 2 + 4 \cdot 4}{2} \cdot 2{,}83 = 33{,}96 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + A_{\text{BASE MAYOR}} + A_{\text{BASE MENOR}} = 33{,}96 + 4^2 + 2^2 = 53{,}96 \text{ m}^2$$

2 **Calcula el área lateral del tronco de pirámide que ves en la figura.**



Teniendo en cuenta que ambas bases son polígonos semejantes, calculamos la apotema, *ap'*, de la base menor es:

$$\boldsymbol{\frac{25}{15} = \frac{17{,}2}{ap'} \to ap' = \frac{15 \cdot 17{,}2}{25} = 10{,}32 \text{ cm}}$$

Calculamos la apotema del tronco de pirámide. El triángulo coloreado es rectángulo. La hipotenusa es *ap*, un cateto 30 y el otro $\boldsymbol{y = 17{,}2 - ap' = \ldots}$

$$\boldsymbol{ap = \sqrt{30^2 + \ldots^2} \approx 30{,}78 \text{ cm}}$$

$$\boldsymbol{A_{\text{LATERAL}} = \frac{5 \cdot \ldots + 5 \cdot \ldots}{2} \cdot \ldots = 3\,078 \text{ cm}^2}$$

$$y = 17{,}2 - ap' = 6{,}9 \text{ cm}$$

$$ap = \sqrt{30^2 + 6{,}9^2} \approx 30{,}78 \text{ cm}$$

$$A_{\text{LATERAL}} = \frac{5 \cdot 25 + 5 \cdot 15}{2} \cdot 30 = 3\,078 \text{ cm}^2$$

Página 249

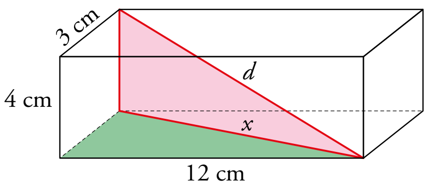
Para practicar

1 **Halla el área total de un cubo de 10 cm de arista.**

Cada cara: $A = 100 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 600 \text{ cm}^2$

2 **Las dimensiones de un ortoedro son 4 cm, 3 cm y 12 cm. Halla el área total y la longitud de la diagonal.**

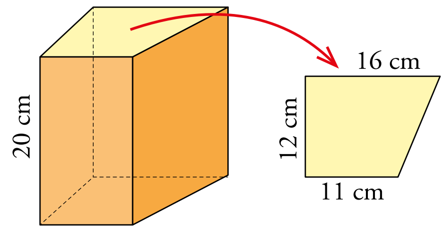


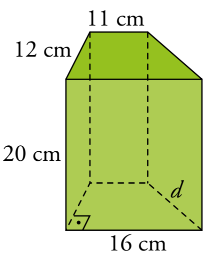
$x^2 = 3^2 + 12^2$

$d^2 = x^2 + 4^2 = 3^2 + 12^2 + 4^2 = 169 \rightarrow d = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$

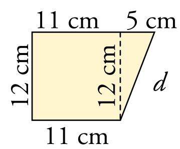
$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot (4 \cdot 3 + 4 \cdot 12 + 3 \cdot 12) = 192 \text{ cm}^2$

3 **La altura de un prisma recto es de 20 cm. Sus bases son trapecios rectángulos cuyas bases miden 11 cm y 16 cm, respectivamente, y la altura, 12 cm. Halla el área total del prisma.**





Para calcular el área lateral tenemos que encontrar primero la medida de *d*.



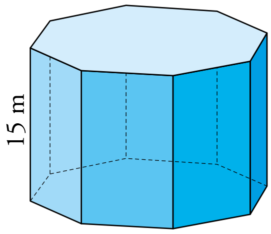
$d^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \rightarrow d = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$

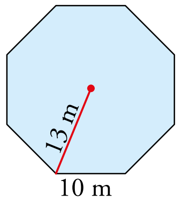
$A_{\text{LATERAL}} = P \cdot h = (16 + 12 + 11 + 13) \cdot 20 = 52 \cdot 20 = 1\,040 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{(11 + 16) \cdot 12}{2} = 162 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 1\,040 + 2 \cdot 162 = 1\,364 \text{ cm}^2$

4 **La altura de un prisma octogonal regular mide 15 m, el lado de la base 10 m y el radio de la misma 13 m. Calcula su área total.**





Para encontrar el área de la base debemos encontrar el área de los 8 triángulos isósceles que la forman, de lados iguales 13 m y lado desigual 10 m. Para ello, calculamos su altura, *ap'*:

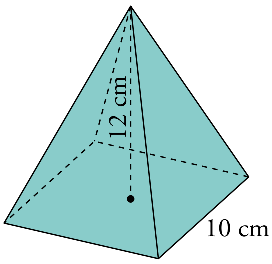
$ap' = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ m

$A_{BASE} = 8 \cdot A_{TRIÁNGULO} = 8 \cdot \dfrac{10 \cdot 12}{2} = 480 \text{ m}^2$

$A_{LATERAL} = 8 \cdot A_{RECTÁNGULO} = 8 \cdot 10 \cdot 15 = 1\,200 \text{ m}^2$

$A_{TOTAL} = 2 \cdot A_{BASE} + A_{LATERAL} = 2 \cdot 480 + 1\,200 = 2\,160 \text{ m}^2$

5 **Halla el área total de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 10 cm de lado y cuya altura es de 12 cm.**

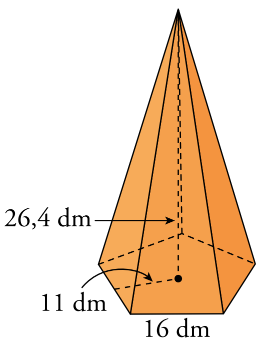


$a' = 5$ cm

Apotema de la pirámide, $ap = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ cm

$A_{TOTAL} = 100 + 4 \cdot \dfrac{10 \cdot 13}{2} = 360 \text{ cm}^2$

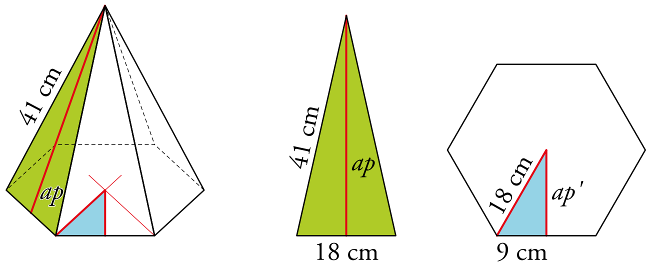
6 **La base de una pirámide regular es un pentágono de 16 dm de lado y 11 dm de apotema.**
La altura de la pirámide es de 26,4 dm.
Halla su área total.



Apotema, $ap = \sqrt{26,4^2 + 11^2} = 28,6$ dm

$A_{TOTAL} = \dfrac{16 \cdot 5 \cdot 11}{2} + \dfrac{16 \cdot 5 \cdot 28,6}{2} = 1\,584 \text{ dm}^2$

7 **Calcula el área total de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el lado de la base mide 18 cm y la arista lateral 41 cm.**



$ap' = \sqrt{18^2 - 9^2} = 15{,}6$ cm

$A_{\text{BASE}} = 6 \cdot \dfrac{18 \cdot 15{,}6}{2} = 6 \cdot 140{,}4 = 842{,}4 \text{ cm}^2$

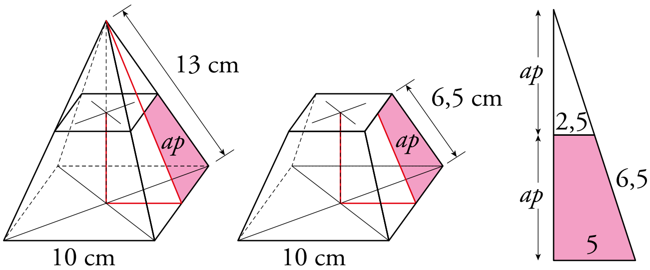
$ap = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ cm

$A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot \dfrac{18 \cdot 40}{2} = 2\,160 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 842{,}4 + 2\,160 = 3\,002{,}4 \text{ cm}^2$

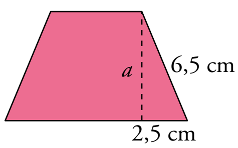
8 **Una pirámide regular de base cuadrada, de 10 cm de lado y arista lateral de 13 cm, se corta por un plano a mitad de su altura.**

Halla el área total del tronco de pirámide resultante.



La pirámide se ha cortado por la mitad, y, como la razón de proporcionalidad de aristas y lados debe mantenerse, se han podido indicar las medidas del triángulo dibujado.

Buscamos ahora la medida de *ap* usando el teorema de Pitágoras y la relacionamos con la altura del trapecio de una de sus caras laterales:

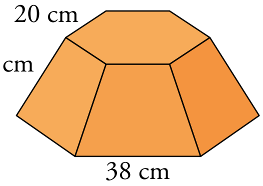


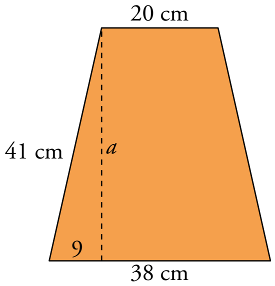
$ap = \sqrt{6{,}5^2 - 2{,}5^2} = 6$ cm

$a = ap = 6$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE MENOR}} = 25 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{BASE MAYOR}} = 100 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot \left(\dfrac{10+5}{2}\right) \cdot 6 = 180 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} A_{\text{TOTAL}} = 25 + 100 + 180 = 305 \text{ cm}^2$$

9 **Halla el área lateral de un tronco de pirámide hexagonal regular cuyas dimensiones son las del dibujo.**



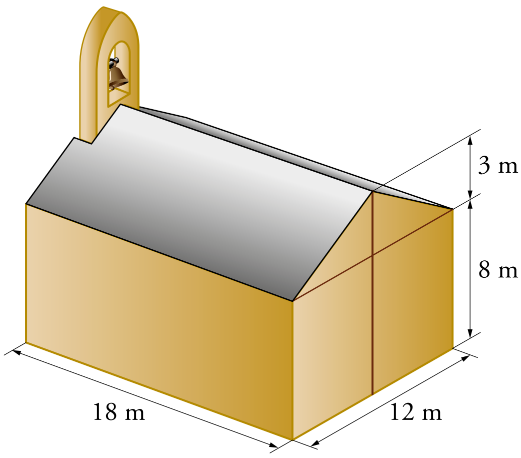


$$a = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40 \text{ cm}$$

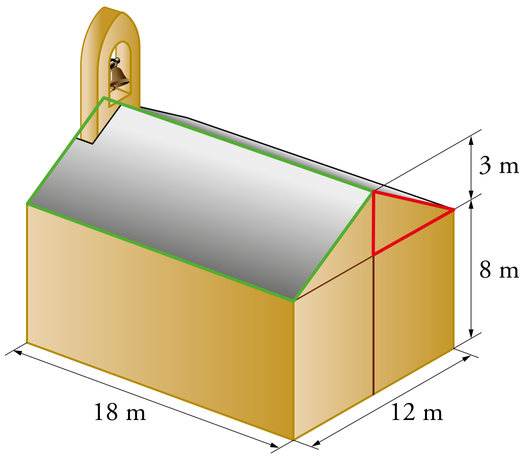
$$A_{\text{LATERAL}} = \frac{6 \cdot 20 + 6 \cdot 38}{2} \cdot 40 = 6\,960 \text{ cm}^2$$

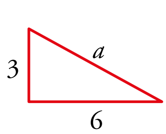
10 **Como paso previo a la reparación de esta antigua ermita se necesitan algunos datos.**

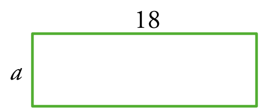
Calcula la superficie del tejado y la de las paredes.



Para calcular la superficie del tejado, primero calculamos el lado desconocido de sus secciones aplicando el teorema de Pitágoras:







$$a^2 = 6^2 + 3^2 \rightarrow a = \sqrt{45} \approx 6{,}71 \text{ m}$$

$$S_{\text{SECCIÓN DEL TEJADO}} = 18 \cdot 6{,}1 = 120{,}78 \text{ m}^2$$

$$S_{\text{TEJADO}} = 2 \cdot 120{,}78 = 120{,}78 \text{ m}^2 = 241{,}56 \text{ m}^2$$

Para calcular la superficie de las paredes, calculamos primero la superficie de una pared frontal y de una pared lateral.

$$S_{\text{PARED FRONTAL}} = 12 \cdot 8 + \frac{12 \cdot 3}{2} = 114 \text{ m}^2$$

$$S_{\text{PARED LATERAL}} = 18 \cdot 8 = 144 \text{ m}^2$$

$$S_{\text{PAREDES}} = 2 \cdot (114 + 144) = 516 \text{ m}^2$$

4 POLIEDROS REGULARES

Página 250

Para practicar

1 Considerando la suma de los ángulos que coinciden en cada vértice, justifica por qué no se puede construir un poliedro en los siguientes casos:

a) Con 6 triángulos equiláteros en cada vértice.

b) Con 4 cuadrados en cada vértice.

c) Con 4 pentágonos regulares en cada vértice.

d) Con hexágonos regulares o polígonos regulares de más lados.

a) Sumarían 360° y eso es plano, no se puede torcer.

b) También suman 360°, y es plano.

c) Miden 432° y eso es más que un plano. Se superpondrían.

d) Con tres hexágonos suman 360°, es un plano; y con solo dos no se puede formar. Los poliedros regulares de más lados tienen ángulos mayores que 360° y, por tanto, no podemos, puesto que se superpondrían.

Página 251

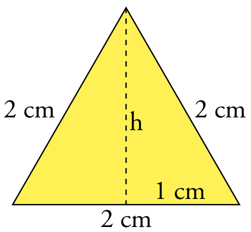
2 Halla el área de:

a) Un triángulo equilátero de lado 2 cm.

b) Un cuadrado de lado 2 cm.

c) Un pentágono regular de lado 2 cm y apotema 1,38 cm.

a)



$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = 1{,}73$ cm

$A = \dfrac{2 \cdot 1{,}73}{2} = 1{,}73$ cm^2

b) $A = 4$ cm^2

c) $A = \dfrac{(5 \cdot 2) \cdot 1{,}38}{2} = 6{,}9$ cm^2

3 Con los resultados obtenidos en el ejercicio anterior, halla el área de:

a) Un tetraedro. **b) Un cubo.** **c) Un octaedro.**

d) Un dodecaedro. **e) Un icosaedro.**

Todos ellos de arista 2 cm.

Tomamos los datos obtenidos en el ejercicio anterior.

a) $A = 4 \cdot 1{,}73 = 6{,}9$ cm^2

b) $A = 6 \cdot 4 = 24$ cm^2

c) $A = 8 \cdot 1{,}73 = 13{,}84$ cm^2

d) $A = 12 \cdot 6{,}9 = 82{,}8$ cm^2

e) $A = 20 \cdot 1{,}73 = 34{,}6$ cm^2

5 ▶ SECCIONES PLANAS DE POLIEDROS

Página 253

Para practicar

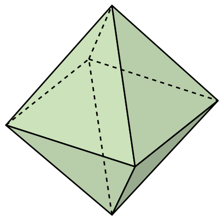
1 Indica por dónde hay que cortar este octaedro regular para obtener:

a) Un cuadrado.

b) El cuadrado más grande posible.

c) Un trapecio.

d) Un trapezoide.



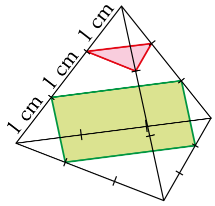
a) Por un plano perpendicular a su diagonal.

b) Por un plano perpendicular a la diagonal en la mitad de la misma, esto es, por el centro del octaedro.

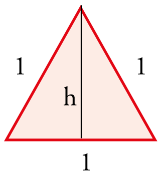
c) El plano del apartado b) lo inclinamos tomando como eje sobre el que gira una de las aristas del cuadrado.

d) El plano del apartado c) lo inclinamos para que no sea paralelo a las aristas del octaedro.

2 Observa dos secciones de un tetraedro regular de 3 cm de arista. La roja es paralela a la base, y la verde, paralela a una de las aristas. Calcula el área de cada una.



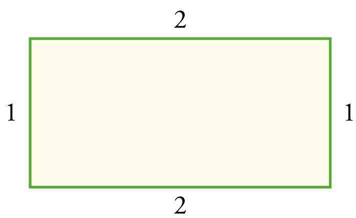
El área de la sección roja, que es un triángulo equilátero de lado 1 cm:



$$h = \sqrt{1 - 0{,}5^2} = 0{,}9$$

$$A_{\text{ROJA}} = \frac{1 \cdot h}{2} = \frac{0{,}9}{2} = 0{,}45 \text{ cm}^2$$

El área de la sección verde, que es un rectángulo:

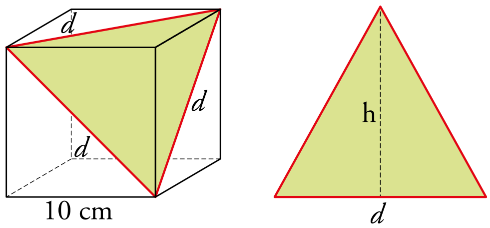


$$A_{\text{VERDE}} = 1 \cdot 2 = 2 \text{ cm}^2$$

3 **La sección que ves en la imagen es el mayor triángulo equilátero que se puede obtener cortando el cubo.**

a) Calcula el lado, *d*, y la altura, h.

b) Calcula el área.



a) Encontramos d a partir del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 10 cm y d es su hipotenusa, aplicando el teorema de Pitágoras:

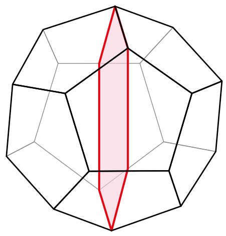
$$d = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} \approx 14{,}14 \text{ cm}$$

Buscamos ahora h aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo dibujado:

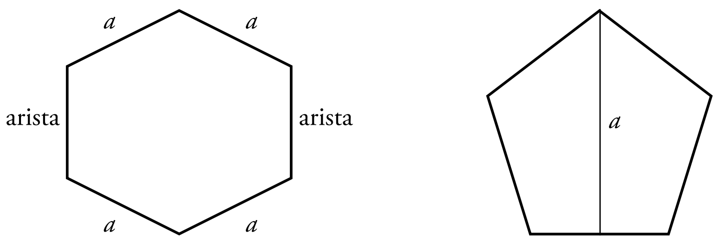
$$\text{h} = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{200 - 50} \approx 12{,}25 \text{ cm}$$

b) $A = \dfrac{d \cdot \text{h}}{2} = 86{,}6 \text{ cm}^2$

4 **¿Qué polígono se obtiene al cortar un dodecaedro en dos mitades iguales por un plano que contiene a dos aristas opuestas? ¿Es un polígono regular? Justifica tu respuesta.**



Obtendremos un hexágono irregular, solamente dos lados serán aristas del dodecaedro, y los otros cuatro serán iguales a *a:*

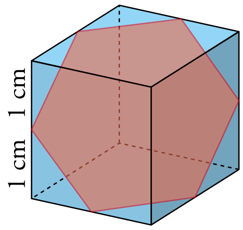


5 **Cortando un cubo de esta forma se obtiene un hexágono regular.**

a) ¿Cuánto mide el lado? ¿Y la apotema?

b) Calcula su área.

c) ¿Qué volumen tiene cada una de las partes en que queda dividido?

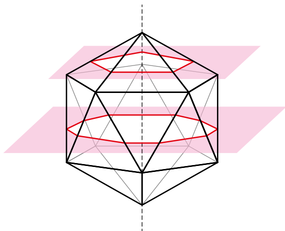


a) El lado mide $\sqrt{2}$ = 1,41 cm y la apotema 1,22 cm.

b) El área mide $A = \dfrac{6 \cdot 1{,}41 \cdot 1{,}22}{2} = 5{,}16 \text{ cm}^2$.

c) Cada parte tendrá la mitad del volumen del cubo, puesto que el corte divide al cubo en dos partes iguales, así que el volumen de cada parte será de 4 cm^3.

6 **¿Qué polígonos se obtienen al cortar un icosaedro por un plano perpendicular al eje que une dos vértices opuestos? ¿Son regulares? Explica tu respuesta.**



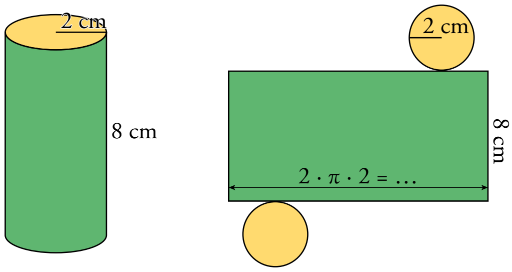
Se pueden obtener dos tipos de polígonos, ambos con los vértices sobre las aristas del icosaedro: pentágonos y octógonos. Los pentágonos que se pueden obtener son siempre regulares; los octógonos, sin embargo, son siempre irregulares, excepto en el caso del plano que corta a las ocho caras (triángulos equiláteros) por los segmentos paralelos a sus bases que están a la misma distancia de estas que de sus vértices opuestos.

6 CILINDROS

Página 254

Para fijar ideas

1 **Dibuja en tu cuaderno el desarrollo de un cilindro recto cuya base tiene 2 cm de radio y cuya altura es de 8 cm.**



Copia y completa:

- **La superficie lateral es un…**
- **La base mide:** $b = 2\pi \cdot \ldots = \ldots$ **cm**
- **Y la altura: h = … cm**

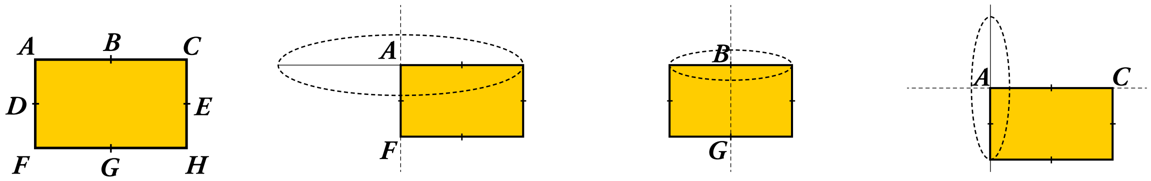
- La superficie lateral es un rectángulo.
- La base mide: $b = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$ cm
- Y la altura: h = 8 cm

2 **Dibuja en tu cuaderno los cilindros que se generan al hacer girar este rectángulo alrededor de:**

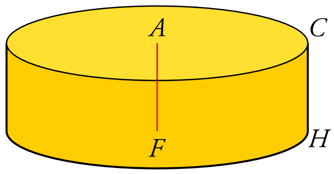
a) ***AF***

b) ***BG***

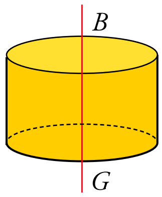
c) ***AC***



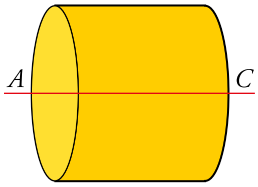
a)



b)



c)

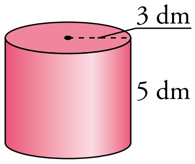


3 **Halla el área lateral y el área total de un cilindro de revolución de 5 dm de altura y 3 dm de radio de la base. Copia y completa:**

$\boldsymbol{A_{LATERAL} = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot \ldots \cdot \ldots = \ldots\ dm^2}$

$\boldsymbol{A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot \ldots^2 = \pi \cdot \ldots = \ldots\ dm^2}$

$\boldsymbol{A_{TOTAL} = A_{LATERAL} + 2 \cdot A_{BASE} = \ldots + \ldots = 150{,}72\ dm^2}$



$A_{LATERAL} = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 94{,}2\ dm^2$

$A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = \pi \cdot 9 = 28{,}26\ dm^2$

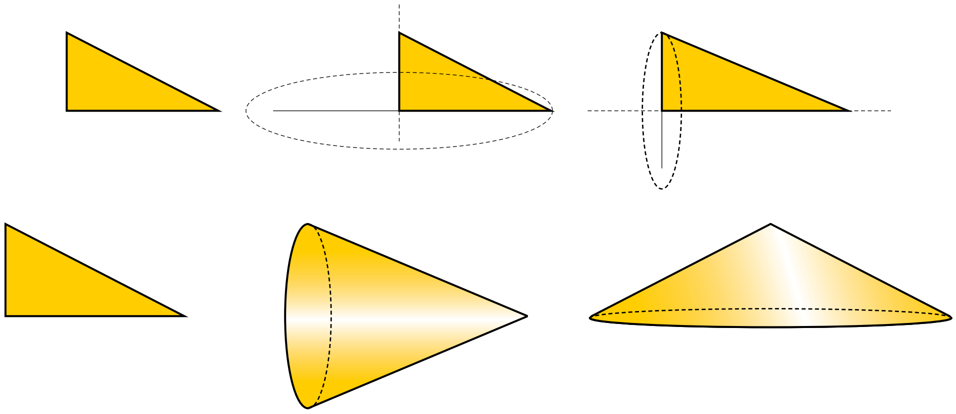
$A_{TOTAL} = A_{LATERAL} + 2 \cdot A_{BASE} = 94{,}2 + 56{,}52 = 150{,}72\ dm^2$

7 CONOS

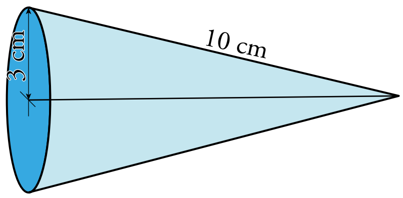
Página 255

Para fijar ideas

1 **Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo. Después, dibuja el cono que se genera al hacerlo girar alrededor de cada cateto.**



2 **La generatriz de un cono mide 10 cm y el radio de la base 3 cm. Calcula el área lateral y el área total. Copia y completa.**



$\boldsymbol{A_{LATERAL} = \pi r g = \pi \cdot \dots \cdot \dots = \dots\ cm^2}$

$\boldsymbol{A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot \dots^2 = \pi \cdot \dots = \dots\ cm^2}$

$\boldsymbol{A_{TOTAL} = A_{LATERAL} + A_{BASE} = \dots + \dots = 122{,}46\ cm^2}$

$A_{LATERAL} = \pi r g = \pi \cdot 3 \cdot 10 = 94{,}2\ cm^2$

$A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = \pi \cdot 9 = 28{,}26\ cm^2$

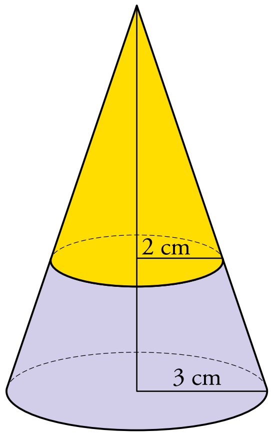
$A_{TOTAL} = A_{LATERAL} + A_{BASE} = 94{,}2 + 28{,}26 = 122{,}46\ cm^2$

8 ▶ TRONCOS DE CONO

Página 256

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.



1 **Un cono recto tiene un radio de 3 cm en la base y una superficie lateral de 90 cm^2. Un plano paralelo a la base lo corta dando una sección de 2 cm de radio. ¿Cuál es la superficie lateral del tronco de cono resultante del corte?**

Tras el corte, tenemos dos conos semejantes: el original y el que ves coloreado de amarillo, más pequeño.

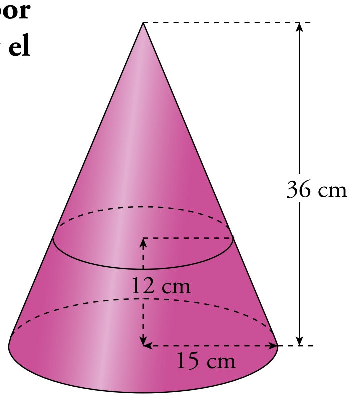
La razón de semejanza es $k = \frac{r'}{r} = \frac{2}{3}$. **Y la razón de sus áreas es** $k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

$A_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{4}{9} \cdot A_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{4}{9} \cdot \ldots = \ldots \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRONCO DE CONO}} = A_{\text{CONO GRANDE}} - A_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \ldots - \ldots = 50 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{4}{9} \cdot A_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{4}{9} \cdot 90 = 40 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRONCO DE CONO}} = A_{\text{CONO GRANDE}} - A_{\text{CONO PEQUEÑO}} = 90 - 40 = 50 \text{ cm}^2$

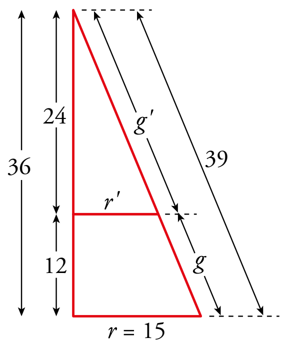


2 **Un cono, cuya base tiene 15 cm de radio y cuya altura es de 36 cm, se corta por un plano paralelo a la base y a 12 cm de la misma. Calcula las dimensiones y el área lateral del tronco de cono resultante.**

Calculamos la generatriz del cono con el teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{\ldots^2 + \ldots^2} = \sqrt{\ldots} = 39 \text{ cm}$$

Y recurrimos a la semejanza para calcular las medidas del tronco de cono:



$\frac{r'}{24} = \frac{15}{\ldots} \to r' = \frac{24 \cdot \ldots}{\ldots} = 10 \text{ cm}$

$\frac{g'}{24} = \frac{39}{\ldots} \to g' = \frac{24 \cdot \ldots}{\ldots} = 26 \text{ cm}$

$g = 39 - g' = 39 - 26 = 13 \text{ cm}$

El área lateral del tronco de cono es el área lateral del cono de altura 36 cm menos la del cono de altura 24 cm:

$A_{\text{LAT}} = \pi \cdot 15 \cdot 39 - \pi \cdot \ldots \cdot \ldots = 325\pi \approx 1\,021 \text{ cm}^2$

$\sqrt{36^2 + 15^2} = \sqrt{1521} = 39 \text{ cm}$

$\frac{r'}{24} = \frac{15}{36} \to r' = \frac{24 \cdot 15}{36} = 10 \text{ cm}$

$\frac{g'}{24} = \frac{39}{36} \to g' = \frac{24 \cdot 39}{36} = 26 \text{ cm}$

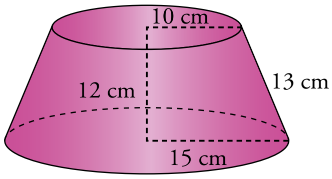
$A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot 15 \cdot 39 - \pi \cdot 10 \cdot 26 = 325\pi \approx 1\,021 \text{ cm}^2$

Página 257

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

3 **Calcula, aplicando las fórmulas anteriores, el área del tronco de cono visto en el último ejercicio de la página anterior.**



Atendiendo a las fórmulas, solo necesitamos tres datos:

$r = 15$ **cm**

$r' = 10$ **cm**

$g = 13$ **cm**

Entonces:

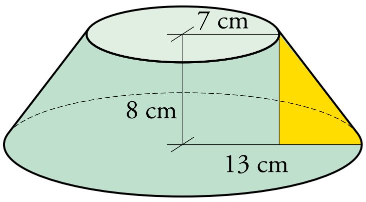
$A_{\text{LATERAL}} = \pi(r + r')g = \pi(\ldots + \ldots) \cdot \ldots = \ldots\,\pi \approx \ldots \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = \pi(r + r')g + \pi r^2 + \pi r'^2 = \ldots + \pi \cdot 15^2 + \pi \cdot \ldots^2 \approx 2042 \text{ cm}^2$

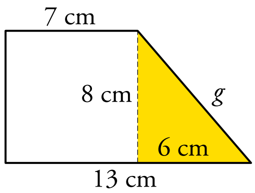
$A_{\text{LATERAL}} = \pi(r + r')g = \pi(15 + 10) \cdot 13 = 325\pi \approx 1021 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = \pi(r + r')g + \pi r^2 + \pi r'^2 = 1021 + \pi \cdot 15^2 + \pi \cdot 10^2 \approx 2042 \text{ cm}^2$

4 **Calcula el área del tronco de cono.**



Conocemos r y r'. Solo nos falta la generatriz, g, que obtenemos aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo coloreado:



$g = \sqrt{\ldots^2 + \ldots^2} = \sqrt{\ldots} = 10$ **cm**

Tenemos por tanto:

$r = 13$ **cm** $\quad r' = 7$ **cm** $\quad g = 10$ **cm**

$A_{\text{LATERAL}} = \pi(r + r')g = \pi(\ldots + \ldots) \cdot \ldots = \ldots\,\pi \approx \ldots \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = \pi(r + r')g + \pi r^2 + \pi r'^2 = \ldots + \pi \cdot 13^2 + \pi \cdot \ldots^2 \approx 1313 \text{ cm}^2$

$g = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$

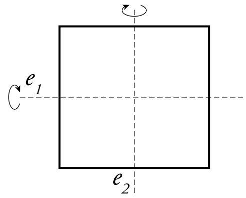
$A_{\text{LATERAL}} = \pi(r + r')g = \pi(13 + 7) \cdot 10 = 200\pi \approx 628 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = \pi(r + r')g + \pi r^2 + \pi r'^2 = 628 + \pi \cdot 13^2 + \pi \cdot 7^2 \approx 1313 \text{ cm}^2$

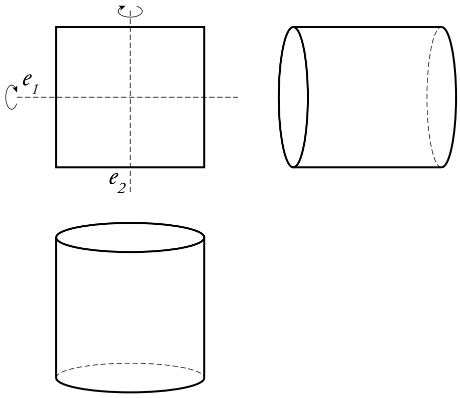
Página 258

Para practicar

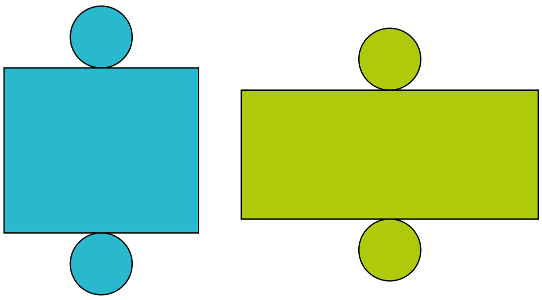
1 **Dibuja en tu cuaderno un cuadrado y traza los ejes de simetría paralelos a los lados.**



Dibuja los cilindros que se generan al girar el cuadrado alrededor de cada uno de esos ejes.

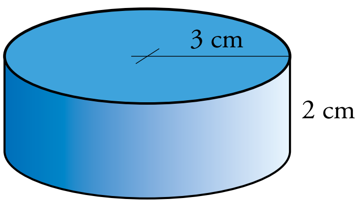


2 **Toma algunas medidas y decide cuál de los siguientes desarrollos corresponde a un cilindro.**

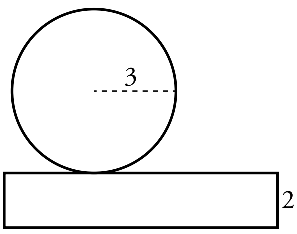


El primero.

3 **Dibuja el desarrollo de un cilindro recto cuya base tiene 3 cm de radio y la altura es de 2 cm.**



Calcula el área lateral y el área total.



$A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 2 = 37,68 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 37,68 + 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 37,68 + 56,52 = 94,2 \text{ cm}^2$

4 **¿Qué cantidad de chapa se necesita para construir un depósito cilíndrico cerrado de 0,6 m de radio de la base y 1,8 m de altura?**

$2 \cdot \pi \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}8 + 2 \cdot \pi \cdot 0{,}6^2 = 2{,}16\pi + 0{,}72\pi = 9{,}0432$

Se necesitan 9,0432 m^2 de chapa.

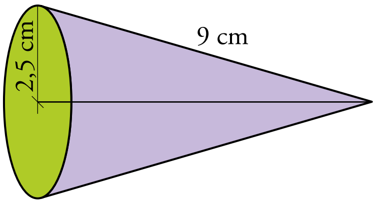
5 **Se han de impermeabilizar el suelo y las paredes interiores de un aljibe cilíndrico abierto por arriba. El radio de su base mide 4 m, y la altura, 5 m. Si cuesta 18 € impermeabilizar 1 m^2, ¿cuál es el coste de toda la obra?**

$A_{\text{ALJIBE}} = 2\pi \cdot 4 \cdot 5 + \pi \cdot 16 = 56\pi = 175{,}84 \text{ m}^2$

$175{,}84 \text{ m}^2 \cdot 18 \text{ €/m}^2 = 3\,165{,}12 \text{ €}$

El coste será de 3 165,12 €.

6 **Calcula el área lateral y el área total de este cono.**

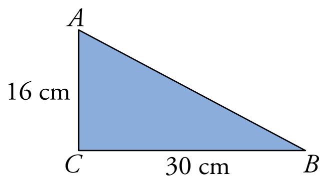


$A_{\text{LATERAL}} = \pi r g = \pi \cdot 2{,}5 \cdot 9 = 70{,}65 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE}} = \pi r^2 = \pi \cdot 2{,}5^2 = \pi \cdot 6{,}25 = 19{,}6 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + A_{\text{BASE}} = 70{,}65 + 19{,}6 = 90{,}25 \text{ cm}^2$

7 **Dibuja los conos que se obtienen al hacer girar este triángulo rectángulo:**

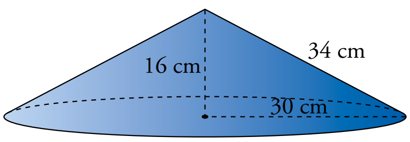


a) Alrededor de *AC*.

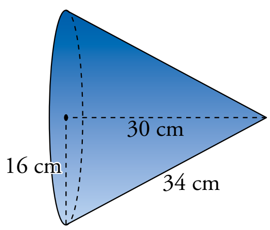
b) Alrededor de *BC*.

c) Calcula el área total de ambos.

a)



b)



c) $A_{\text{LATERAL a)}} = 30 \cdot \pi \cdot 34 = 3\,202{,}8 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL b)}} = 16 \cdot \pi \cdot 34 = 1\,708{,}16 \text{ cm}^2$

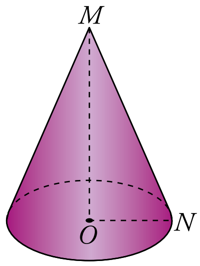
$A_{\text{TOTAL a)}} = 3\,202{,}8 + 2\,826 = 6\,028{,}8 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL b)}} = 1\,708{,}16 + 803{,}84 = 2\,512 \text{ cm}^2$

8 **Calcula el área lateral y el área total de este cono, sabiendo que:**

$\overline{MO}$ = 84 cm

$\overline{MN}$ = 85 cm

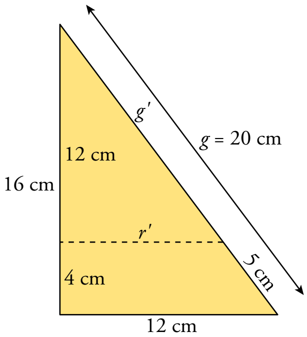


$\overline{ON} = \sqrt{85^2 - 84^2} = 13$ cm

$A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot 13 \cdot 85 = 3\,469{,}7 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 3\,469{,}7 + 530{,}66 = 4\,000{,}36 \text{ cm}^2$

9 **El cono cuya base tiene un radio de 12 cm y cuya altura es de 16 cm es cortado por un plano perpendicular a su eje que pasa a 4 cm de la base. Halla las dimensiones, el área lateral y el área total del tronco de cono que se forma.**



$\dfrac{r'}{12} = \dfrac{12}{16} \rightarrow r' = 9$ cm

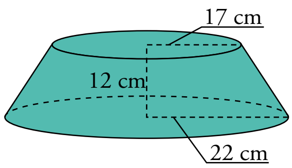
$\dfrac{g'}{12} = \dfrac{20}{16} \rightarrow g' = 15$ cm

$A_{\text{LATERAL}} = 12 \cdot \pi \cdot 20 - 9 \cdot \pi \cdot 15 = 329{,}7 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} + B_{\text{INF}} = 329{,}7 + \pi \cdot 12^2 = 781{,}86 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 781{,}86 + \pi \cdot 9^2 = 1\,036{,}2 \text{ cm}^2$

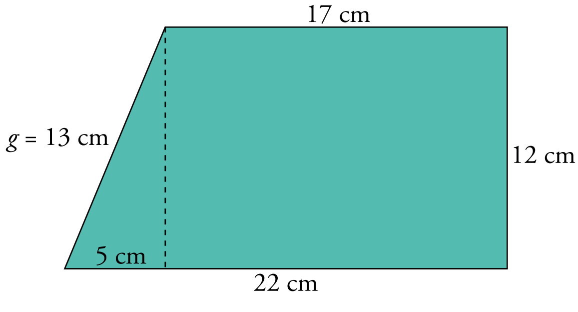
10 **Observa este tronco de cono cuyas bases tienen radios de 17 cm y 22 cm, y cuya altura es de 12 cm.**



a) Halla su generatriz.

b) Calcula su área lateral.

c) Halla el área total.

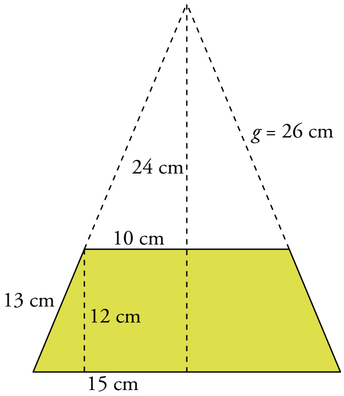


a) $g = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ cm

b) $A_{\text{LATERAL}} = \pi(r + r') \cdot g = 1\,591{,}98 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{TOTAL}} = 1\,591{,}98 + 907{,}46 + 1\,519{,}76 = 4\,019{,}2 \text{ cm}^2$

11 **Halla la superficie de una flanera abierta por arriba, con las siguientes medidas: radio de las bases, 10 cm y 15 cm; generatriz, 13 cm.**



$$\frac{g}{10} = \frac{13 + g}{15} \rightarrow g = 26 \text{ cm}$$

$$A_{\text{LATERAL}} = 15 \cdot \pi \cdot 39 - 10 \cdot \pi \cdot 26 = 1\,020{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 1\,020{,}5 + \pi \cdot 10^2 = 1\,334{,}5 \text{ cm}^2$$

12 **En nuestro jardín tenemos 32 macetones con forma de tronco de cono. Los radios de sus bases miden 14 cm y 20 cm, respectivamente, y su generatriz, 38 cm. Calcula cuánto cuesta pintarlos (solo la parte exterior) a razón de 40 € por metro cuadrado.**

$A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot (14 + 20) \cdot 38 = 4\,056{,}88 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL TODOS}} = 4\,056{,}88 \cdot 32 = 129\,820{,}16 \text{ cm}^2 = 12{,}982016 \text{ m}^2 \approx 13 \text{ m}^2$

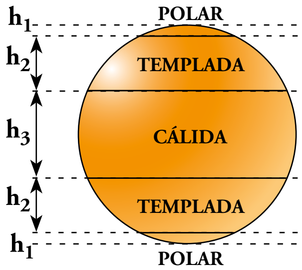
Costará, aproximadamente, 520 €.

9 ▸ ESFERAS

Página 259

Para fijar ideas

1 **En una esfera terrestre escolar de 20 cm de radio están señaladas las zonas climáticas. Sabemos que cada casquete polar tiene 2 cm de altura, y cada zona templada, 10 cm de altura. Calcula y completa en tu cuaderno.**



a) La superficie de la esfera: $A_{ESFERA} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \ldots^2 \approx \ldots \text{ cm}^2$

b) La superficie de cada zona. Comprueba que la suma de todas ellas es igual a la superficie de la esfera.

$R = 20$ cm $\quad h_1 = 2$ cm $\quad h_2 = 10$ cm $\quad h_3 = 40 - 2 \cdot (2 + 10) = \ldots$ cm

$$\left.\begin{aligned} A_{CASQUETE\ POLAR} &= 2\pi R h_1 = 2\pi \cdot \ldots \cdot \ldots \approx 251{,}2 \text{ cm}^2 \\ A_{ZONA\ TEMPLADA} &= 2\pi R h_2 = 2\pi \cdot \ldots \cdot \ldots \approx 1\,256 \text{ cm}^2 \\ A_{ZONA\ CÁLIDA} &= 2\pi R h_3 = 2\pi \cdot \ldots \cdot \ldots \approx 2\,010{,}6 \text{ cm}^2 \end{aligned}\right\} 2 \cdot 251{,}2 + 2 \cdot \ldots + \ldots = \ldots \text{ cm}^2$$

a) $A_{ESFERA} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 20^2 \approx 5\,024 \text{ cm}^2$

b) $h_3 = 40 - 2 \cdot (2 + 10) = 16$ cm

$A_{CASQUETE\ POLAR} = 2\pi R h_1 = 2\pi \cdot 20 \cdot 2 \approx 251{,}2 \text{ cm}^2$

$A_{ZONA\ TEMPLADA} = 2\pi R h_2 = 2\pi \cdot 20 \cdot 10 \approx 1\,256 \text{ cm}^2$

$A_{ZONA\ CÁLIDA} = 2\pi R h_3 = 2\pi \cdot 20 \cdot 16 \approx 2\,009{,}6 \text{ cm}^2$

$2 \cdot 251{,}2 + 2 \cdot 1\,256 + 2\,009{,}6 = 5\,024 \text{ cm}^2$

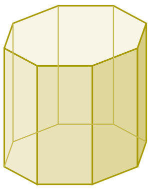
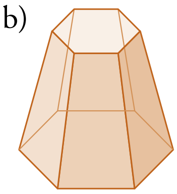
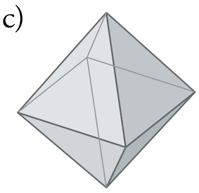
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

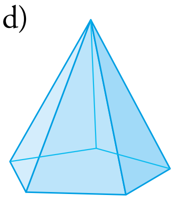
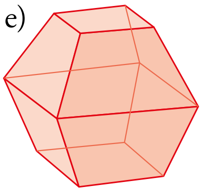
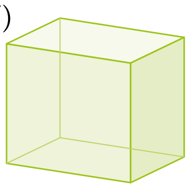
Página 260

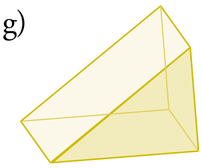
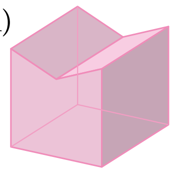
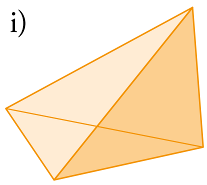
¿DOMINAS LO BÁSICO?

Tipos de cuerpos geométricos

1 **Indica cuáles de estos poliedros no son catalogables entre los conocidos (prisma, pirámide, tronco de pirámide, poliedro regular). Cataloga los demás.**

a) 
b) 
c) 

d) 
e) 
f) 

g) 
h) 
i) 

a) Prisma octogonal recto

b) Tronco de pirámide hexagonal

c) Octaedro

d) Pirámide pentagonal recta

e) No catalogable

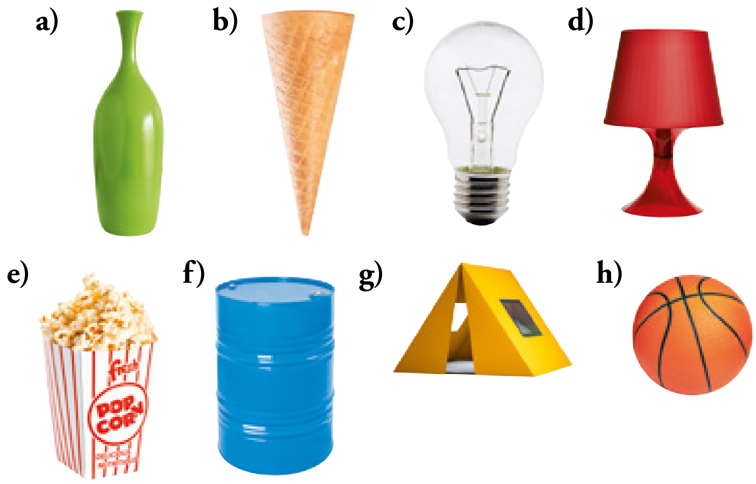
f) Ortoedro

g) Prisma triangular recto

h) No catalogable

i) Pirámide triangular

2 **¿Cuáles de estas figuras son cuerpos de revolución? Identifica las que reconozcas.**



Son todas cuerpos de revolución menos e) y g).

Las conocidas son:

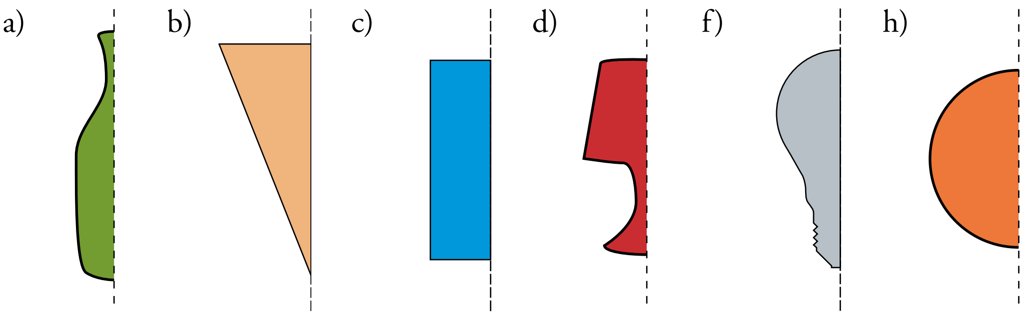
b) Cono

d) La pantalla de la lámpara es la superficie lateral de un tronco de cono.

f) Cilindro

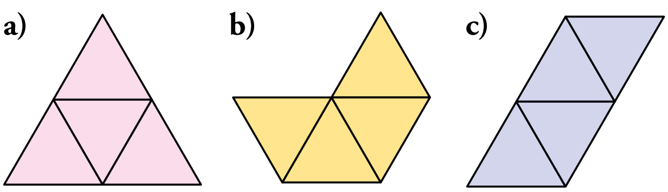
h) Esfera

3 **Dibuja en tu cuaderno la figura y el eje sobre el que debe girar para generar cada uno de los cuerpos de revolución que has identificado en el ejercicio anterior.**



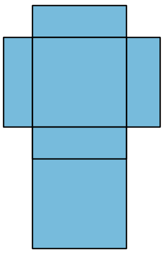
Desarrollo de cuerpos geométricos

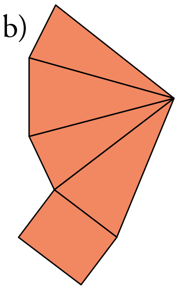
4 **¿Cuál, o cuáles, de estas figuras corresponde al desarrollo de un tetraedro regular?**

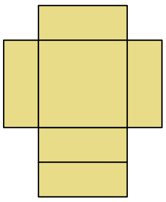


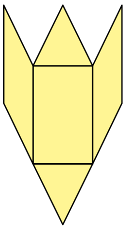
a) y c)

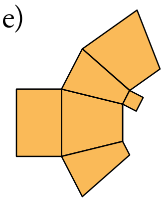
5 **¿Cuáles de estos desarrollos corresponden a un poliedro? ¿Y a un cuerpo de revolución?**

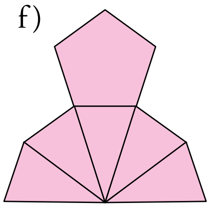
a) 

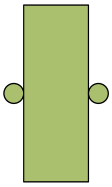
b) 

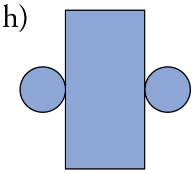
c) 

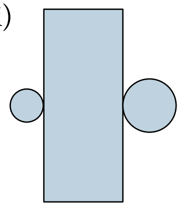
d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

i) 

a) Es un ortoedro.

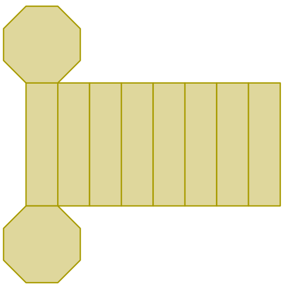
b) Es una pirámide cuadrangular con base rectangular.

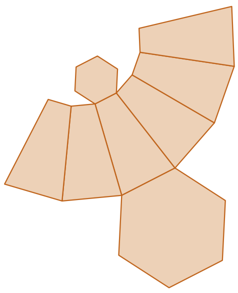
f) Es una pirámide pentagonal.

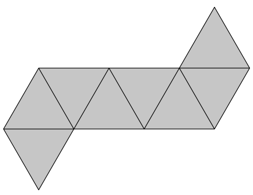
h) Es un cilindro.

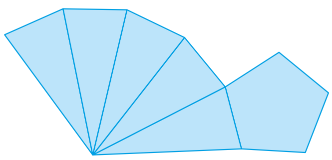
Con c), d), e), g) e i) no se pueden construir ni poliedros ni cuerpos de revolución.

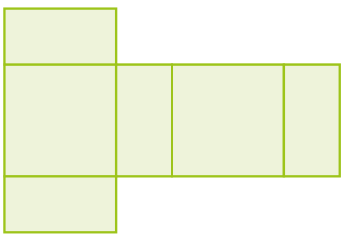
6 **Dibuja de forma aproximada el desarrollo plano de los poliedros a), b), c), d), f) y g) del ejercicio 1.**

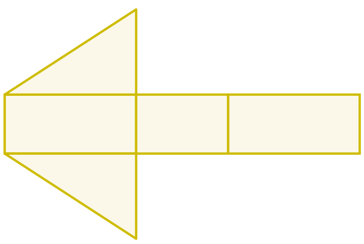
a) 

b) 

c) 

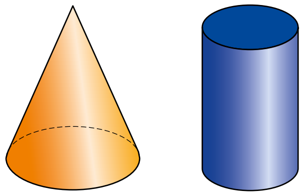
d) 

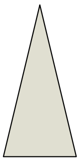
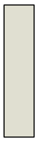
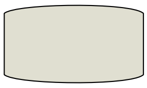
f) 

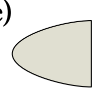
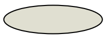
g) 

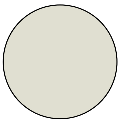
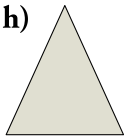
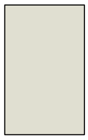
Secciones en los cuerpos geométricos

7 **Observa algunas secciones del cono y del cilindro.**



a) 
b) 
c) 

d) 
e) 
f) 

g) 
h) 
i) 

Averigua a cuál de los dos corresponde cada una e indica cómo se consigue.

a) Plano vertical del cono que pasa por su vértice y no es perpendicular a la base.

b) Plano vertical en el cilindro, perpendicular a la base y que pasa por un lado de la circunferencia, no por el centro.

c) No corresponde.

d) Plano horizontal perpendicular a la base del cono, lo corta por la mitad superior.

e) Plano inclinado en el cono, sin pasar por el vértice.

f) Plano inclinado en ambos.

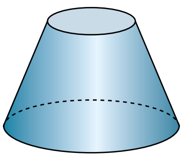
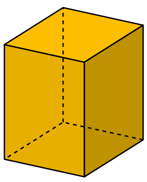
g) Plano horizontal en la base del cono.

h) Plano vertical del cono que pasa por su vértice y es perpendicular a la base.

i) Plano vertical en el cilindro, perpendicular a la base y que pasa por el centro.

Página 261

8 **Busca y dibuja los cortes de un plano con cada uno de estos cuerpos geométricos para obtener, cuando sea posible, un cuadrado, un rectángulo, un trapecio, una circunferencia, una elipse, un pentágono y un hexágono.**

a) 
b) 

Un cuadrado → En b), planos perpendiculares a la altura.

Un rectángulo → En b), planos perpendiculares a la base.

Un trapecio → En a), planos que corten a las dos bases.

Una circunferencia → En a), planos paralelos a las bases.

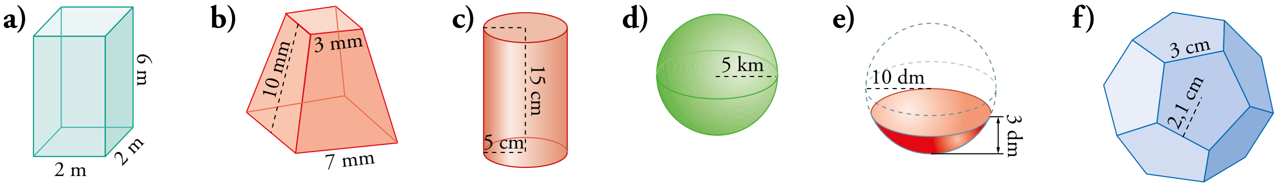
Una elipse → En a), planos inclinados que no corten a las bases.

Un pentágono → En b), plano inclinado que pase por un vértice y que corte la cara opuesta.

Un hexágono → En b), plano inclinado que corte a las dos bases.

Áreas de cuerpos geométricos

9 **Calcula el área de cada cuerpo geométrico.**



a) $A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot 2^2 = 56 \text{ m}^2$

b) $A_{\text{TOTAL}} = \dfrac{4 \cdot 7 + 4 \cdot 3}{2} \cdot 10 + 7^2 + 3^2 = 258 \text{ mm}^2$

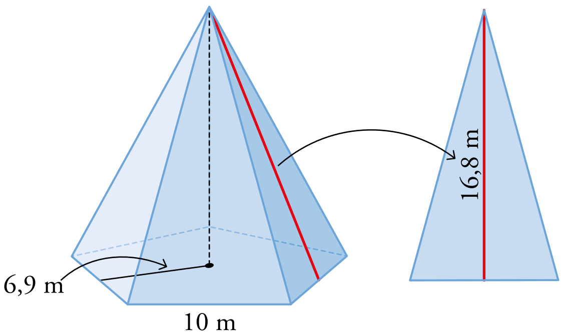
c) $A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 15 + 2 \cdot \pi \cdot 5^2 = 628 \text{ cm}^2$

d) $A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot \pi \cdot 5^2 = 314 \text{ km}^2$

e) $A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 3 = 188{,}4 \text{ dm}^2$

f) $A_{\text{TOTAL}} = 12 \cdot \dfrac{5 \cdot 3 \cdot 2{,}1}{2} = 189 \text{ cm}^2$

10 **Calcula el área total de una pirámide regular que tiene por base un pentágono regular de 10 m de lado. La apotema de la pirámide mide 16,8 m, y la de la base, 6,9 m.**

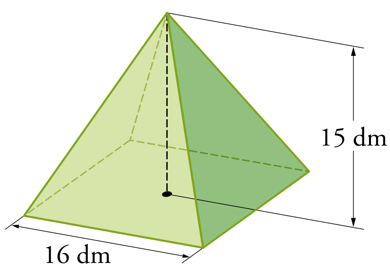


$A_{\text{BASE}} = \dfrac{6{,}9 \cdot 5 \cdot 10}{2} = 172{,}5 \text{ m}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 5 \cdot \dfrac{10 \cdot 16{,}8}{2} = 420 \text{ m}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 172{,}5 + 420 = 592{,}5 \text{ m}^2$

11 **La base de una pirámide regular es un cuadrado de 16 dm de lado. Su altura es de 15 dm. Calcula su área total.**



Encontramos su apotema aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos 8 dm y 15 dm:

$ap = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \text{ dm}$

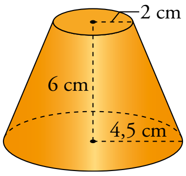
$A_{\text{BASE}} = 16 \cdot 16 = 256 \text{ dm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot \dfrac{17 \cdot 16}{2} = 544 \text{ dm}^2$

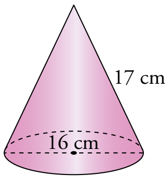
$A_{\text{TOTAL}} = 256 + 544 = 800 \text{ dm}^2$

12 **Halla el área total de estos cuerpos:**

a)



b)

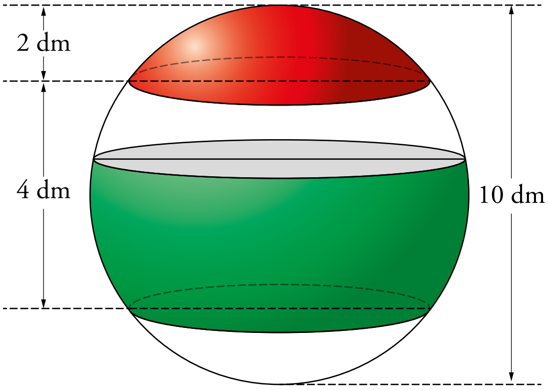


$g = \sqrt{6^2 + 2{,}5^2} = 6{,}5$ cm

a) $A_{\text{TOTAL}} = \pi(4{,}5 + 2) \cdot 6{,}5 + \pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 4{,}5^2 = 208{,}81 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 8 \cdot 17 + 8^2 \cdot \pi = 628 \text{ cm}^2$

13 **Calcula las superficies del casquete esférico de 2 dm de altura y de una zona esférica de 4 dm de altura contenidos en una esfera de 10 dm de diámetro.**



$A_{\text{CASQUETE ESFÉRICO}} = 2\pi \cdot 5 \cdot 2 = 62{,}8 \text{ dm}^2$

$A_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = 2\pi \cdot 5 \cdot 4 = 125{,}6 \text{ dm}^2$

ENTRÉNATE Y PRACTICA

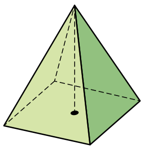
14 **Explica por qué estos poliedros no son regulares.**

a) Una pirámide cuadrangular regular.

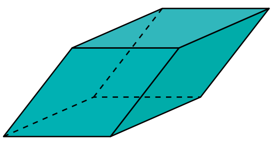
b) Un poliedro de seis caras iguales, todas rombos.

c) Un poliedro de seis caras iguales, todas triángulos equiláteros.

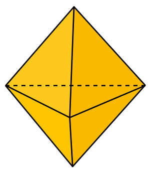
a)



b)



c)



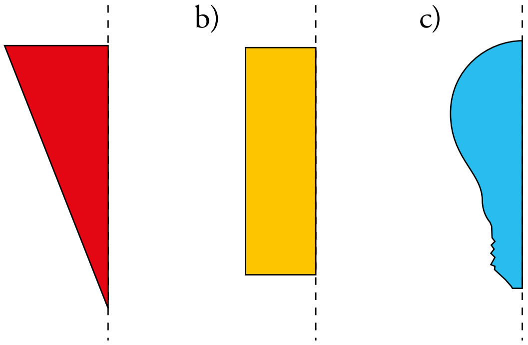
a) Porque no todas sus caras son polígonos regulares iguales.

b) Porque sus caras no son polígonos regulares.

c) Porque en algunos vértices concurren tres caras y en otros, cuatro. Para que fuera regular deberían concurrir el mismo número de caras en todos los vértices.

15 **Dibuja los cuerpos de revolución generados al girar cada una de estas figuras alrededor del eje.**

a) b) c)



Relaciona cada una de las figuras que has dibujado con una del ejercicio 2.

a) Al dibujar esta figura, sale un cono como el de la figura b) del ejercicio 2.

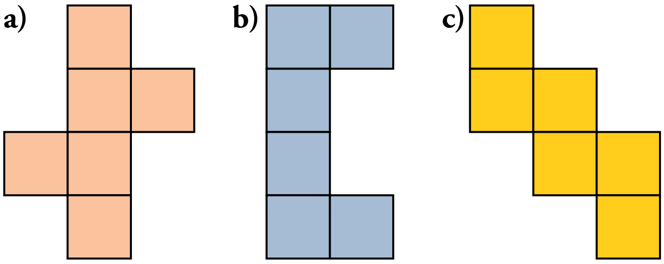
b) Al dibujar esta figura, sale un cilindro como el de la figura f) del ejercicio 2.

c) Al dibujar esta figura, sale una bombilla como la figura c) del ejercicio 2.

Página 262

16 **¿Cuál, o cuáles, de estas figuras corresponde al desarrollo de un hexaedro regular?**

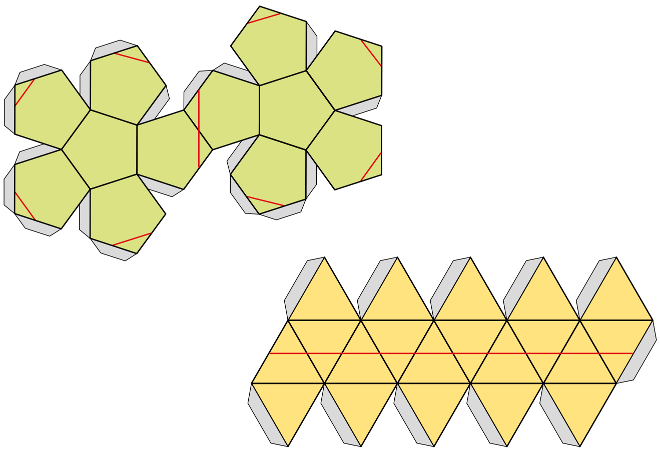
a) **b)** **c)**



a) y c).

17 **A continuación, puedes ver dos recortables para construir un dodecaedro y un icosaedro.**

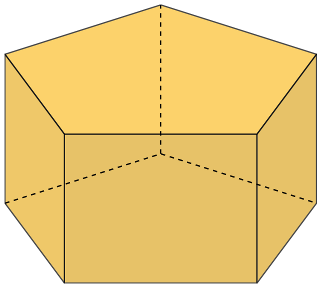
¿Qué figura formarán las líneas rojas, en cada caso, al montar los poliedros?



Puedes descargar los recortables en anayaeducacion.es, ampliados, y comprobar tu respuesta construyendo los poliedros.

Formarán un decágono regular en ambos casos.

18 **Indica por dónde debe cortar un plano a este prisma para obtener:**



a) Un cuadrado.

b) Un triángulo equilátero.

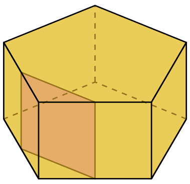
c) El rectángulo con la mayor superficie posible.

d) Un pentágono regular.

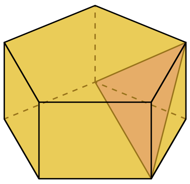
e) Un pentágono irregular.

f) El trapecio con mayor área posible.

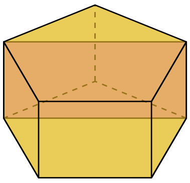
a)



b)



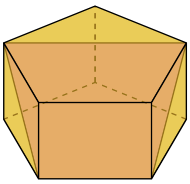
c)



d) Pentágono regular: plano paralelo a las bases.

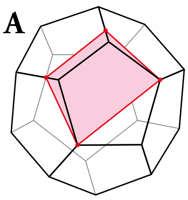
Pentágono irregular: plano inclinado paralelo a las bases y que corte a las cinco caras laterales.

e)

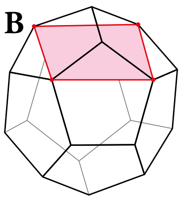


19 **Las siguientes secciones del dodecaedro regular son cuadriláteros.**

A



B

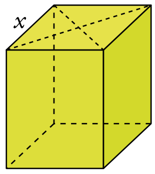


¿Qué tipo de cuadrilátero es cada uno? Justifica tus respuestas.

La primera sección es un trapecio, tiene dos lados paralelos pero uno de ellos es mayor que el otro, y los otros dos son simétricos.

La segunda sección es un cuadrado ya que todos los lados son iguales y paralelos entre sí.

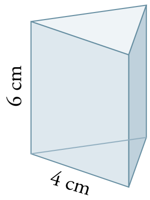
20 **Calcula el área total de un prisma recto de 15 cm de altura cuyas bases son rombos cuyas diagonales miden 16 cm y 12 cm.**

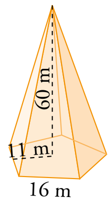


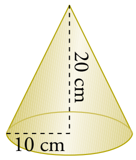
$A_{\text{ROMBO}} = \dfrac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$ $\qquad x = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ cm}$

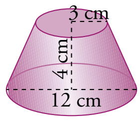
$A_{\text{LATERAL}} = 10 \cdot 15 \cdot 4 = 600 \text{ cm}^2$ $\qquad A_{\text{TOTAL}} = 600 + 2 \cdot 96 = 792 \text{ cm}^2$

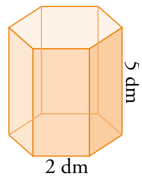
21 **Calcula el área de cada cuerpo geométrico. Antes, deberás obtener algún dato que falta.**

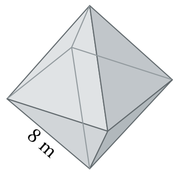
a)


b)


c)


d)


e)


f)


a) Altura de la base = $\sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} \approx 3{,}5$ cm

$A_{\text{TOTAL}} = 3 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot \dfrac{4 \cdot 3{,}5}{2} = 86 \text{ cm}^2$

b) Apotema = $\sqrt{60^2 + 11^2} = 61$ m

$A_{\text{TOTAL}} = \dfrac{5 \cdot 16 \cdot 61}{2} + \dfrac{5 \cdot 16 \cdot 11}{2} = 2\,880 \text{ m}^2$

c) $g = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22{,}4$ cm

$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 10 \cdot 22{,}4 + \pi \cdot 10^2 = 1\,017{,}36 \text{ cm}^2$

d) $g = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ cm

$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot (6 + 3) \cdot 5 + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 3^2 = 282{,}6 \text{ cm}^2$

e) Apotema de la base = $\sqrt{2^2 - 1^2} = 1{,}7$ dm

$A_{\text{TOTAL}} = 6 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot \dfrac{6 \cdot 2 \cdot 1{,}7}{2} = 80{,}4 \text{ dm}^2$

f) Altura del triángulo = $\sqrt{8^2 - 4^2} = 6{,}9$ m

$A_{\text{TOTAL}} = 8 \cdot \dfrac{8 \cdot 6{,}9}{2} = 220{,}8 \text{ m}^2$

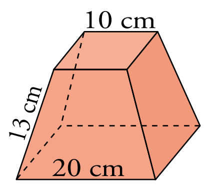
22 **Las bases de un tronco de pirámide regular son cuadrados de 10 cm y 20 cm de lado, respectivamente. Las aristas laterales miden 13 cm. Halla su área total.**

Altura de una cara lateral, $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm

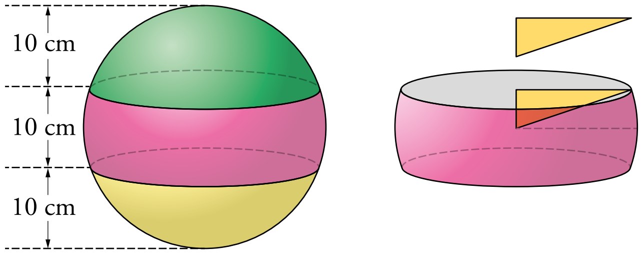
$A_{\text{BASES}} = 20^2 + 10^2 = 500 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = \dfrac{20 + 10}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 720 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 720 + 500 = 1\,220 \text{ cm}^2$



23 **Se corta una esfera de 30 cm de diámetro por dos planos paralelos a 5 cm del centro, y se colorean las tres zonas determinadas sobre la misma.**



a) Calcula el área de cada una de esas zonas.

b) Calcula el área total del cuerpo que queda entre los dos planos del corte.

a) Las tres zonas tienen la misma superficie:

$A = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 15 \cdot 10 = 942{,}5 \text{ cm}^2$

b) Tenemos que calcular el área de las bases, para lo que necesitamos conocer su radio:

$r = \sqrt{15^2 - 5^2} = \sqrt{200} \approx 14{,}14 \text{ cm}$

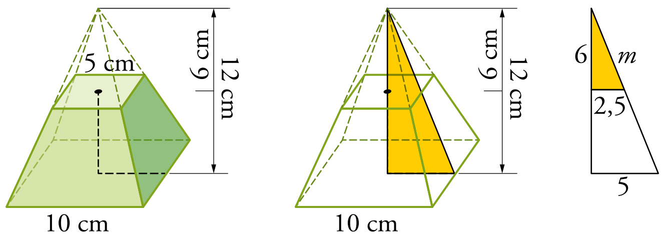
$A_{\text{TOTAL}} = 942{,}5 + 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 942{,}5 + 2\pi \cdot 200 = 942{,}5 + 1\,256{,}6 \approx 2\,200 \text{ cm}^2$

Página 263

INTERPRETA, DESCRIBE, EXPRÉSATE

24 **A continuación, se incluyen varias resoluciones para la misma pregunta. Analízalas y explica el proceso seguido en cada una.**

Una pirámide regular de base cuadrada de 10 cm de lado y altura 12 cm se corta por un plano a mitad de su altura. ¿Cuál es el área total del tronco de pirámide resultante?



Resolución A

$\boldsymbol{ap = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \to m = 13 : 2 = 6{,}5}$

$\boldsymbol{A_{\text{LATERAL PIRÁMIDE GRANDE}} \to \dfrac{10 \cdot 13}{2} \cdot 4 = 260 \text{ cm}^2}$

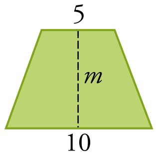
$\boldsymbol{A_{\text{LATERAL PIRÁMIDE PEQUEÑA}} \to \dfrac{5 \cdot 6{,}5}{2} \cdot 4 = 65 \text{ cm}^2}$

$\boldsymbol{A_{\text{LATERAL TRONCO}} \to 260 - 65 = 195 \text{ cm}^2}$

$\boldsymbol{A_{\text{TOTAL TRONCO}} = A_{\text{LATERAL TRONCO}} + A_{\text{B. INF}} + A_{\text{B. SUP}}}$

$\boldsymbol{A_{\text{TOTAL TRONCO}} = 195 + 100 + 25 = 320 \text{ cm}^2}$

Resolución B



$ap = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

$m = 13 : 2 = 6{,}5$

$$A_{\text{TOTAL TRONCO}} = \frac{10+5}{2} \cdot 6{,}5 \cdot 4 + 10^2 + 5^2 = 320 \text{ cm}^2$$

Resolución C

$ap = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

Razón de semejanza entre las pirámides $\rightarrow \dfrac{1}{2}$

Razón entre sus áreas laterales $\rightarrow \dfrac{1}{4}$

$$A_{\text{LATERAL PIRÁMIDE GRANDE}} = \frac{10 \cdot 13}{2} \cdot 4 = 260 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{LATERAL TRONCO}} = \frac{3}{4} \cdot 260 = 195 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL TRONCO}} = 195 + 10^2 + 5^2 = 320 \text{ cm}^2$$

Resolución A

Calcula las longitudes de los elementos necesarios en ambas pirámides, teniendo en cuenta que las de la pequeña y la grande están en relación de 1 a 2.

Calcula el área lateral de ambas, y su diferencia, que es el área lateral del tronco.

Al área lateral del tronco le suma las de sus bases.

Resolución B

Cada cara lateral del tronco de pirámide es un trapecio cuyas bases miden 5 cm y 10 cm, respectivamente, y la apotema es la mitad de la apotema de la pirámide grande.

Calcula el área de uno de esos trapecios y, multiplicándola por cuatro, el área lateral del tronco. Después, suma el área de las bases.

Resolución C

Calcula la apotema, *ap*, de la pirámide grande. Y su área lateral.

Sabiendo que la razón de semejanza entre la pirámide pequeña y la pirámide grande es 1/2, obtiene la razón de las áreas, 1/4. Así, el área lateral de la pequeña es 1/4 del área de la grande, y la del tronco, las tres cuartas partes de la misma.

Calcula el área del tronco y suma el área de las bases.

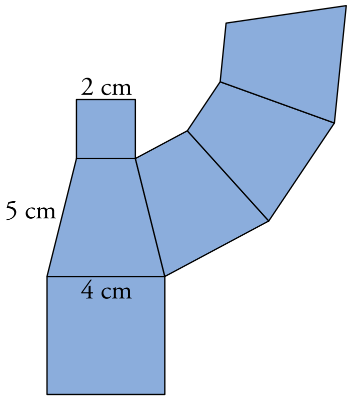
RESUELVE PROBLEMAS SENCILLOS

25 **Deseamos construir con alambres el esqueleto de todos los poliedros regulares, de modo que cada una de las aristas mida 1 dm. ¿Qué cantidad de alambre utilizaremos en cada uno de ellos?**

	TETRAEDRO	CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
NÚMERO DE ARISTAS	6	12	12	30	30
LONGITUD TOTAL	6 dm	12 dm	12 dm	30 dm	30 dm

26 **Dibuja en tu cuaderno el desarrollo de un tronco de pirámide cuadrangular regular cuyas aristas miden: las de la base mayor, 4 cm; las de la menor, 2 cm, y las laterales, 5 cm.**

Halla su área total. (Las caras laterales son trapecios. Comprueba que su altura es de 4,9 cm.)



Altura de una cara lateral, $h = \sqrt{5^2 - 1^2} = 4{,}9$ cm

$A_{\text{TOTAL}} = 2^2 + 4^2 + 4 \cdot \left(\frac{2+4}{2}\right) \cdot 4{,}9 = 78{,}8 \text{ cm}^2$

27 **¿Cuánto costará forrar un cajón de dimensiones 0,6 m × 0,5 m × 0,4 m con una chapa metálica que sale a 18 €/m²? ¿Y si, además, queremos cubrir las aristas con un embellecedor de madera de 23 €/m²?**

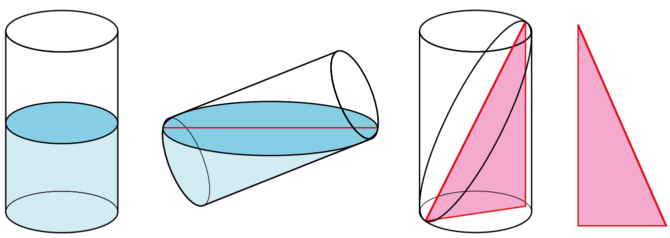
$A = 2(0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}4) = 1{,}48 \text{ m}^2$

El precio es $1{,}48 \cdot 18 = 26{,}64$ €.

La suma de longitudes de todas las aristas es 6 m.

Hemos de pagar $23 \cdot 6 = 138$ €.

28 **Un vaso cuya base tiene un diámetro de 4 cm se ha llenado de agua hasta la mitad. Lo inclinamos hasta que llegue al borde y se forma una elipse el triple de larga que de ancha. ¿Qué altura tiene el vaso?**

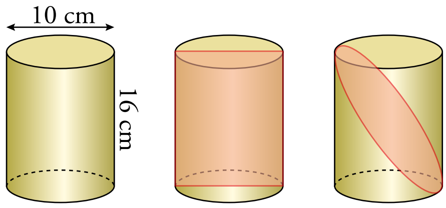


La altura del vaso es: $h = \sqrt{12^2 - 4^2} = 11{,}3$ cm

29 **Las paredes de un pozo de 12 m de profundidad y 1,6 m de diámetro han sido enfoscadas con cemento. El precio del trabajo es de 40 € el metro cuadrado. ¿Cuál ha sido el coste?**

$2\pi r h = 60{,}288 \text{ m}^2 \rightarrow$ El coste ha sido de 2 411,52 €, aproximadamente.

30 **Observa este cilindro y algunas de las secciones que podemos obtener en él.**



a) Halla las dimensiones del rectángulo y de la elipse.

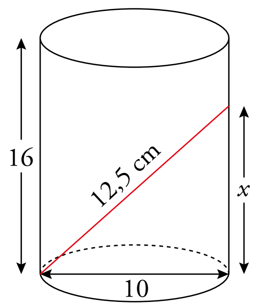
b) ¿Por dónde habría que cortar el cilindro para obtener una elipse cuyos ejes mayor y menor fueran 12,5 cm y 10 cm, respectivamente?

c) ¿Y para obtener un rectángulo cuya altura fuera el doble que la base?

a) RECTÁNGULO: largo $\rightarrow$ 16 cm; ancho $\rightarrow$ 10 cm

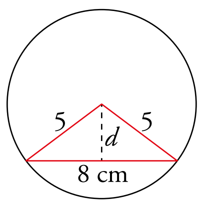
EJES DE LA ELIPSE: mayor $\rightarrow$ $\sqrt{16^2 + 10^2} = 18{,}87$ cm; menor $\rightarrow$ 10 cm

b) Para obtener esa elipse habría que cortar el cilindro por un plano inclinado que pasase por un punto de la circunferencia de la base y por un punto a 7,5 cm de altura en una generatriz opuesta.



$$x = \sqrt{12{,}5^2 - 10^2} = 7{,}5 \text{ cm}$$

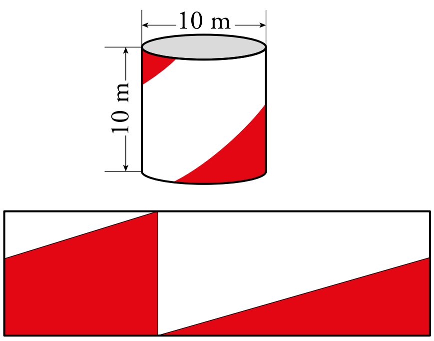
c) Para obtener ese rectángulo habría que cortar el cilindro por un plano perpendicular a la base, a 3 cm del centro de la misma.



$$d = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ cm}$$

Página 264

31 **Observa este depósito de combustible y calcula el área de la zona coloreada de blanco y la de la zona coloreada de rojo.**



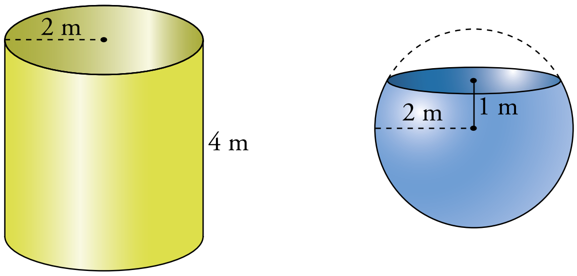
$A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10 = 100\pi = 314 \text{ m}^2$

La zona coloreada de roja es la mitad del rectángulo, entonces:

$A_{\text{ZONA ROJA}} = 314 : 2 = 157 \text{ m}^2$

$A_{\text{ZONA BLANCA}} = 314 : 2 = 157 \text{ m}^2$

32 **Un pintor ha cobrado 1 000 € por impermeabilizar el interior del depósito sin tapa de la izquierda. ¿Cuánto deberá cobrar por impermeabilizar el de la derecha, también sin tapa?**



El área de la esfera completa es igual que la del cilindro.

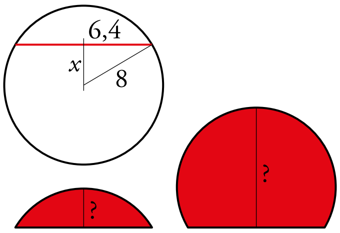
El área del depósito de la derecha, de 3 m de altura, es las $\frac{3}{4}$ parte de la del cilindro.

Por tanto, el coste será $\frac{3}{4} \cdot 1\,000 = 750$ €.

33 ***Begoña ha partido para la familia una sandía en dos trozos y entre todos se han comido el trozo grande. El trozo pequeño es un casquete de 7 cm de altura en el cual vemos una sección de circunferencia de 28 cm de diámetro. ¿Qué radio tenía la sandía?***

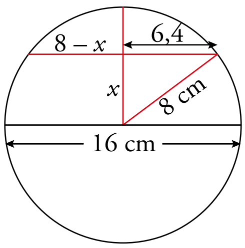
Problema resuelto.

34 **María corta un queso de bola de 16 cm de diámetro de tal manera que se obtiene una circunferencia de 6,4 cm de radio. ¿Qué altura tiene cada trozo apoyándolo sobre el corte?**



$8^2 = x^2 + 6{,}4^2 \rightarrow x = 4{,}8$

El trozo grande tendrá una altura de $4{,}8 + 8 = 12{,}8$ cm y el trozo pequeño, $8 - 4{,}8 = 3{,}2$ cm.



35 **Un casquete esférico tiene una altura de 6 cm y el radio de su base mide 12 cm. ¿Cuál es el área de la esfera a la que pertenece el casquete?**

$R^2 = (R - 6)^2 + 12^2 \rightarrow R^2 = R^2 - 12R + 36 + 144 \rightarrow 12R = 180 \rightarrow R = 15$

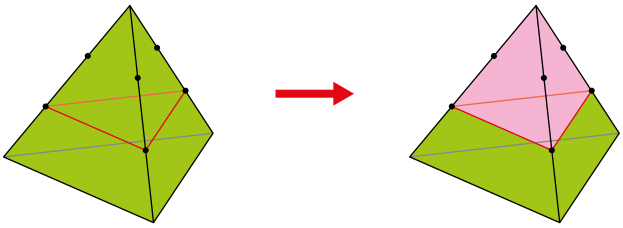
$A = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 15^2 \approx 2\,826 \text{ cm}^2$

36 **Marcos ha cortado una sandía de 15 cm de radio. La zona roja comestible ocupa una superficie de unos 405 cm², que corresponde al 90 % de la sección. ¿A qué altura se ha cortado la sandía?**

El 100 % de la sección por la que se ha cortado la sandía es $\frac{450}{90} \cdot 100 = 450$ cm².

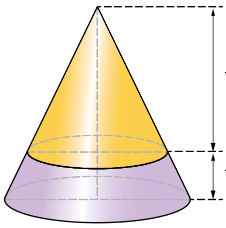
Despejando de la fórmula del área de un círculo, se obtiene que el radio de la sección es de aproximadamente, $r = \sqrt{\frac{450}{\pi}} = 12$ cm. Por tanto, la altura a la que se ha cortado la sandía es a $h = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm del centro.

37 ***El área total de un tetraedro es 45 cm². Se corta por un plano paralelo a la base y a un tercio de su altura. Calcular el área del tetraedro menor y del tronco de pirámide resultantes de la sección.***



Problema resuelto.

38 **Un cono tiene una superficie total de 314 dm² y el radio de la base mide 6 cm. Calcula el área total de cada uno de los dos cuerpos en que queda dividido al cortarlo por un plano paralelo a la base y a un cuarto de su altura.**



La razón entre la altura del cono inicial y la del cono naranja es de $\frac{3}{4}$, por tanto, la razón entre sus áreas será de $\left(\frac{3}{4}\right)^2$:

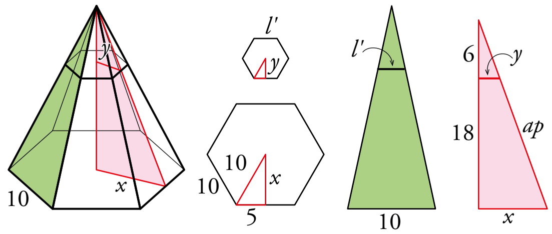
$$A_{\text{CONO PEQUEÑO}} = 314 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 176{,}63 \text{ dm}^2$$

$$A_{\text{TRONCO DE CONO}} = A_{\text{TOTAL CONO GRANDE}} - A_{\text{TOTAL CONO PEQUEÑO}} + 2A_{\text{BASE MENOR}} =$$
$$= 314 - 176{,}63 + 2A_{\text{BASE MENOR}} = 264{,}6 \text{ dm}^2$$

Página 265

39 **La base de una pirámide regular es un hexágono de 10 cm de lado. Su altura es 24 cm.**

Se corta por un plano que pasa a 18 cm de la base. Halla el área total del tronco de pirámide que resulta.

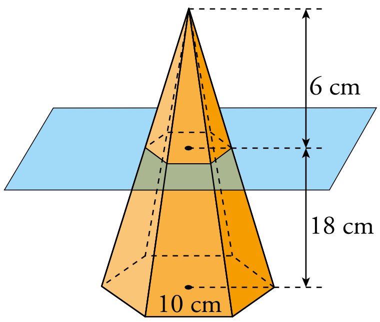


Apotema de la base mayor, $x = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \approx 8{,}66$ cm

Calculamos la apotema de la base menor, y:

$$\frac{y}{6} = \frac{x}{24} \rightarrow y = \frac{8{,}66 \cdot 6}{24} = 2{,}165 \text{ cm}$$

$$\frac{l'}{6} = \frac{10}{24} \rightarrow l' = \frac{60}{24} = 2{,}5 \text{ cm}$$

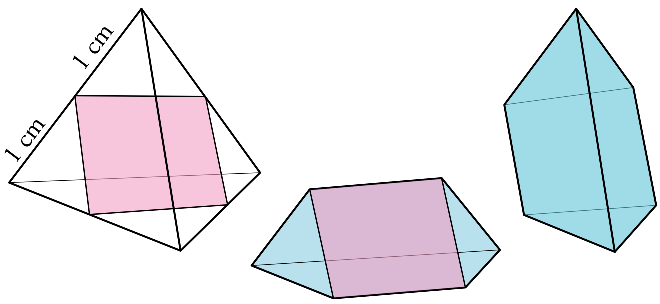


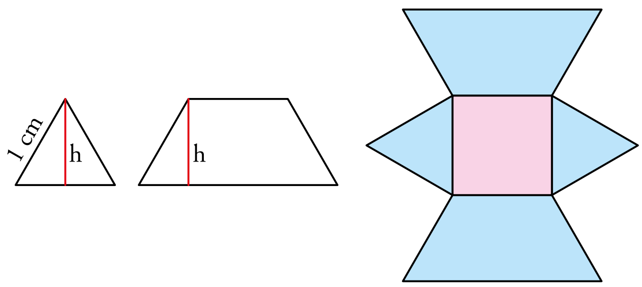
Altura de una cara lateral, $\text{h} = \sqrt{18^2 + (x - y)^2} = 19{,}13$ cm

$$A_{\text{BASES}} = 6 \cdot \frac{10 \cdot x}{2} + 6 \cdot \frac{2{,}5 \cdot y}{2} = 259{,}8 + 16{,}238 = 276{,}038 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 276{,}038 + \frac{(10 + 2{,}5)}{2} \cdot 19{,}13 \cdot 6 = 276{,}038 + 717{,}375 = 993{,}413 \text{ cm}^2$$

40 **Calcula el área total de cada uno de los cuerpos resultantes de cortar el tetraedro regular por un plano que pasa por el punto medio de cuatro de sus aristas, según muestra la ilustración.**





Ambos cuerpos son iguales. Basta calcular el área de uno de ellos:

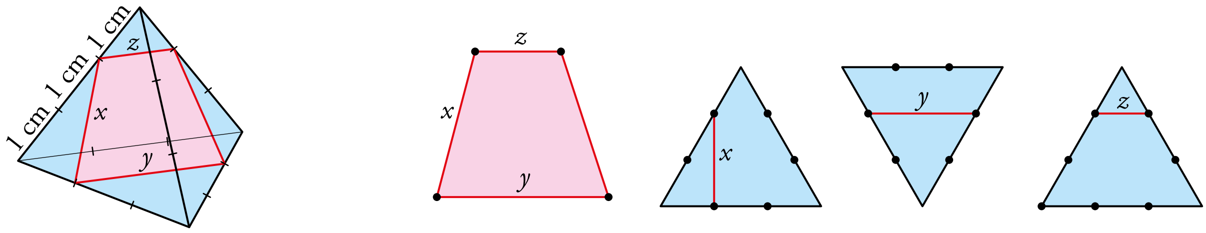
Se despliega el cuerpo resultante y se calcula el área como la suma del área del cuadrado, los dos triángulos y los dos trapecios que lo forman. Para ello, es necesario calcular la altura del triángulo, que coincide con la altura del trapecio.

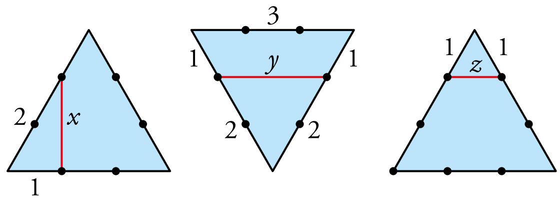
$\text{h} = \sqrt{1^2 - 0{,}5^2} = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87$ cm

$$A = 1^2 + 2 \cdot \frac{(1+2) \cdot \text{h}}{2} + 2 \cdot \frac{1 \cdot \text{h}}{2} = 1 + 3\text{h} + \text{h} = 1 + 4\text{h} = 1 + 4 \cdot 0{,}87 = 4{,}48 \text{ cm}^2$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

41 **Calcula el área de la sección de este tetraedro.**



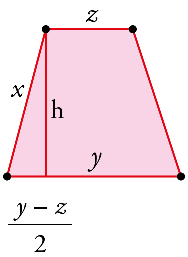


$x = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} = 1{,}73$

$y = 2$

$z = 1$

Calculamos el área de la sección, que es un trapecio:

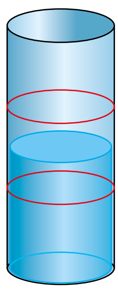


$$x^2 = \text{h}^2 + \left(\frac{y-z}{2}\right)^2 \rightarrow 3 = \text{h}^2 + 0{,}25 \rightarrow \text{h} = 1{,}66 \text{ cm}$$

$$A_{\text{TRAPECIO}} = \left(\frac{y-z}{2}\right) \cdot \text{h} = \frac{2+1}{2} \cdot 1{,}66 = 2{,}49 \text{ cm}^2$$

42 **Una probeta cilíndrica, que se ha llenado hasta la mitad, tiene dos marcas que dividen su altura en tres partes iguales.**

Al inclinarla de modo que el líquido toque una de las marcas, por el lado opuesto tocará la otra. Si la superficie del líquido es una elipse cuyo eje mayor mide 10 cm y cuyo eje menor mide 8 cm, ¿qué altura tiene la probeta?

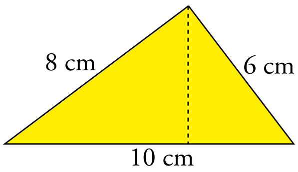


Sea $x = \frac{1}{3}$ de la altura de la probeta. Entonces: $x = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

La altura de la probeta es $6 \cdot 3 = 18$ cm.

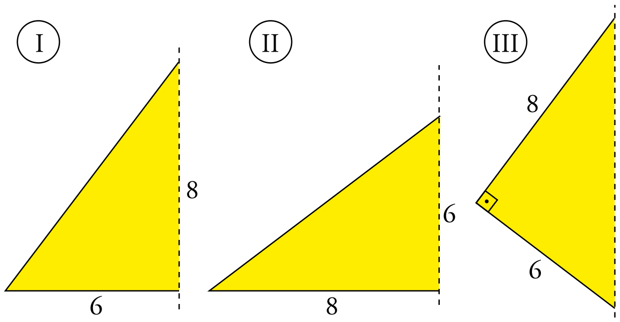
43 **Lee, observa y calcula.**

a) Comprueba que el siguiente triángulo es rectángulo y la altura sobre la hipotenusa mide 4,8 cm.



$$A = \frac{10 \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2}$$

b) Halla la superficie total de las figuras engendradas por este triángulo al girar alrededor de cada uno de sus lados.



a) Comprobamos que verifica el teorema de Pitágoras:

$$10^2 = 8^2 + 6^2 \rightarrow 100 = 64 + 36$$

Por tanto, el triángulo es rectángulo.

A partir de su área podemos encontrar la altura:

$$\frac{10 \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} \rightarrow h = 4{,}8 \text{ cm}$$

b) I Cono de radio 6 cm, altura 8 cm y generatriz 10 cm.

$\pi \cdot 6 \cdot 10 + \pi \cdot 6^2 = 301{,}44 \text{ cm}^2$

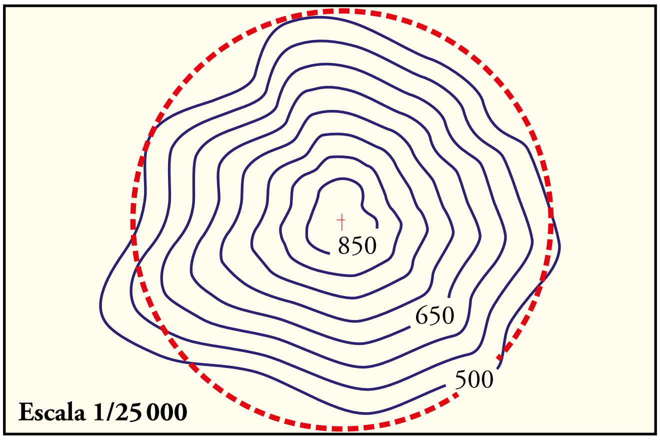
II Cono de radio 8 cm, altura 6 cm y generatriz 10 cm:

$\pi \cdot 8 \cdot 10 + \pi \cdot 8^2 = 452{,}16 \text{ cm}^2$

III Se generan dos conos sin base, ambos de radio h = 4,8 cm, y generatrices 8 cm y 6 cm:

$\pi \cdot 4{,}8 \cdot 8 + \pi \cdot 4{,}8 \cdot 6 = 211 \text{ cm}^2$

44 Meta 15.2. **Se ha decidido reforestar un monte cuyas dimensiones puedes ver en el mapa.**



Estima el número de plantones necesarios, sabiendo que se quiere colocar uno por cada 50 m^2.

Medimos el radio del círculo en el mapa: $r \approx 2{,}8$ cm

En la realidad medirá: $r = 2{,}8 \cdot 25\,000 = 70\,000$ cm $= 700$ m

La altura del monte en la realidad medirá 850 m.

Por tanto, tenemos que calcular el área lateral del cono de radio 700 m y altura 850 m.

$$g = \sqrt{700^2 + 850^2} \approx 1\,101{,}14 \text{ m}$$

La estimación del área del monte donde se plantarán los árboles será el área lateral del cono de radio 700 m y generatriz 1 101,14 m:

$$A = 3{,}14 \cdot 700 \cdot 1\,101{,}14 = 2\,420\,296{,}44 \text{ m}^2$$

$$2\,420\,296{,}44 \text{ m}^2 : 50 \approx 48\,406 \text{ plantones} \approx 50\,000 \text{ plantones}$$

Se necesitan unos 50 000 plantones.

TALLER DE MATEMÁTICAS

Página 266

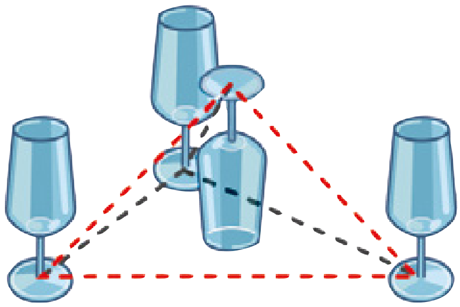
ÉCHALE INGENIO

- **Tienes cuatro copas como estas:**

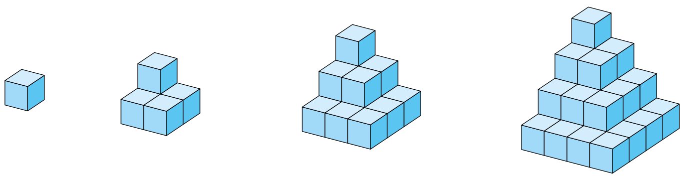
Considerando sus pies como si fueran puntos, ¿cómo las colocarías para que los cuatro pies equidisten?

Piensa en invertir una y también en un tetraedro.

Colocando tres copas formando un triángulo equilátero y, la cuarta, encima para formar la cuarta esquina de un tetraedro.



- **Observa la serie de torres poli-cubo:**



Si el área de la primera es 6:

a) ¿Cuál es el área de cada una de las tres siguientes?

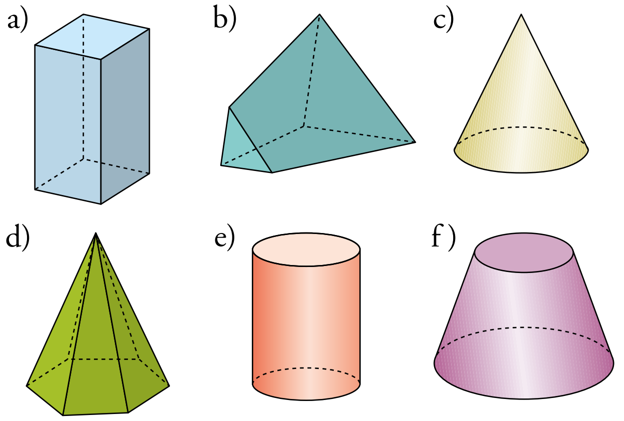
b) ¿Cuál sería el área de una torre de 10 pisos?

c) ¿Y si fueran n los pisos?

PISOS	1	2	3	4	10	…	n
ÁREA	6	20	42	72	420	…	$2n(1 + 2n)$

AUTOEVALUACIÓN

1 Escribe el nombre de estos cuerpos geométricos:



a) Ortoedro

b) Poliedro no catalogable

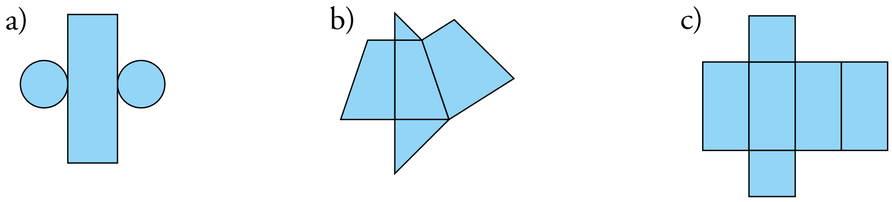
c) Cono

d) Pirámide hexagonal

e) Cilindro

f) Tronco de cono

2 Indica a cuáles de los cuerpos geométricos del ejercicio anterior corresponden estos desarrollos:

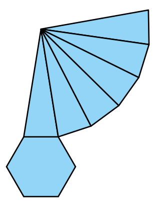


a) Es el desarrollo del cilindro del apartado e).

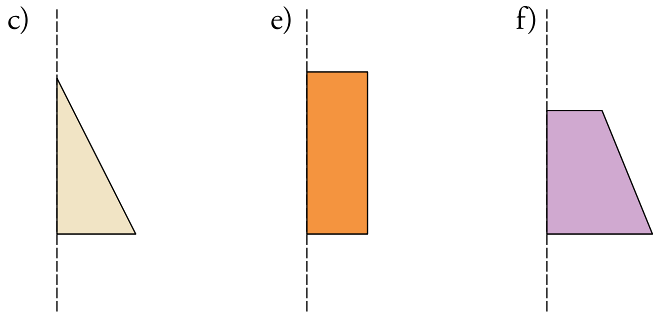
b) Es el desarrollo de la figura del apartado b).

c) Es el desarrollo del ortoedro del apartado a).

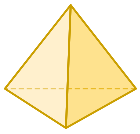
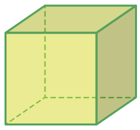
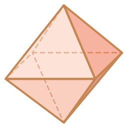
3 Dibuja en tu cuaderno el desarrollo del poliedro del apartado d) del ejercicio 1.



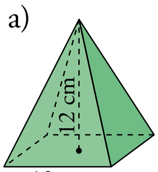
4 En el ejercicio 1 hay tres cuerpos de revolución. Dibuja para cada uno la figura plana que lo genera, acompañada del correspondiente eje de giro.

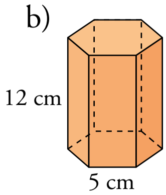


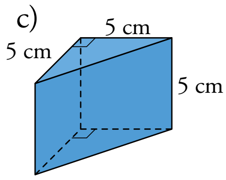
5 **Copia la tabla en tu cuaderno y completa los datos para estos poliedros regulares:**

			
CARAS	4	6	8
ARISTAS	6	12	12
VÉRTICES	4	8	6

6 **Calcula el área de cada poliedro.**

a) 

b) 

c) 

a) h = 13 cm

$A_{\text{TOTAL}} = 100 + 4 \cdot 65 = 360 \text{ cm}^2$

b) $ap_{\text{B}} = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{18{,}75} \approx 4{,}33 \text{ cm}$

$A_{\text{BASES}} = 6 \cdot \dfrac{5 \cdot 4{,}33 \cdot 2}{2} \approx 130 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot 5 \cdot 12 = 360 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 490 \text{ cm}^2$

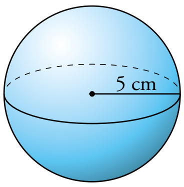
c) $x = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07 \text{ cm}$

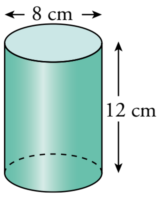
$A_{\text{BASES}} = \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 5}{2} = 2 \cdot 12{,}5 = 25 \text{ cm}^2$

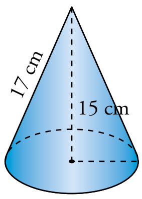
$A_{\text{LATERAL}} = 5 \cdot x \cdot 2{,}5^2 = 85{,}36 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 110{,}35 \text{ cm}^2$

7 **Halla el área de estos cuerpos de revolución:**

a) 

b) 

c) 

a) $A = 4 \cdot \pi \cdot 5^2 = 314 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 4^2 \cdot \pi + 12 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 4 = 401{,}92 \text{ cm}^2$

c) $r = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8 \text{ cm}$

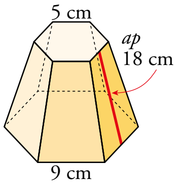
$A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot 8 \cdot 17 = 427{,}04 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE}} = \pi \cdot 8^2 = 200{,}96 \text{ cm}^2$

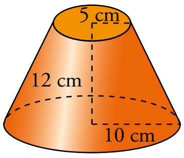
$A_{\text{TOTAL}} = 628 \text{ cm}^2$

8 **Calcula el área total del tronco de pirámide y la del tronco de cono.**

a)



b)



a) $A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot \dfrac{(5+9) \cdot 18}{2} = 756 \text{ cm}^2$

Para calcular el área de las bases, calculamos primero las apotemas:

$x = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33 \text{ cm}^2$

$y = \sqrt{9^2 - 4{,}5^2} = 7{,}8 \text{ cm}^2$

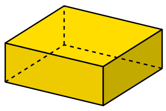
$A_{\text{BASES}} = 6 \cdot \dfrac{5 \cdot 4{,}33}{2} + 6 \cdot \dfrac{9 \cdot 7{,}8}{2} = 275{,}55 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 1031{,}55 \text{ cm}^2$

b) $g = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm}$

$A = \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 10^2 + \pi(5+10) \cdot 13 \approx 1\,005 \text{ cm}^2$

9 **Indica qué cortes hemos de darle a este poliedro para obtener los polígonos que se indican:**



a) Triángulo.

b) Cuadrado.

c) Rectángulo.

d) Trapecio.

e) Rombo.

f) Pentágono.

a) Plano que pasa por un vértice y corte a la base opuesta antes de la diagonal.

b) Plano perpendicular a las bases que corte a las mismas por un segmento de longitud igual a la altura del prisma.

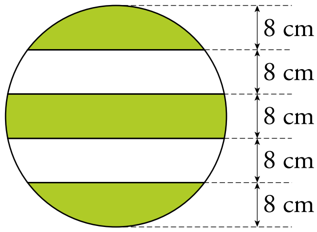
c) Plano perpendicular a cualquiera de las bases.

d) Plano inclinado que corte a ambas bases.

e) Plano que pase por dos vértices opuestos formando 45 grados con las bases.

f) Plano que pase por un vértice y corte a la base opuesta después de la diagonal.

10 **Para un juego, se van a pintar 25 bolas de corcho sintético de 40 cm de diámetro.**
La pintura blanca sale a 12 €/m^2, y la verde, a 15 €/m^2. ¿Cuál será el coste total de la pintura?



R = 20 cm

h = 8 cm

La esfera está dividida en cinco secciones de 8 cm de altura cada una, por lo que todas tendrán la misma superficie:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \mathrm{h} = 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 8 = 320\pi = 1\,004{,}8 \text{ cm}^2 = 0{,}10048 \text{ m}^2$$

Cada bola tiene 3 secciones verdes y 2 blancas, calculamos el coste de pintar una bola:

$$\text{Coste}_{1 \text{ BOLA}} = 3 \cdot 0{,}10048 \cdot 15 + 2 \cdot 0{,}10048 \cdot 12 = 6{,}93 \text{ €}$$

Y el coste total de 25 bolas:

$$25 \cdot 6{,}93 = 173{,}25 \text{ €}$$

El coste total de la pintura será de 173,25 €.